1. Sprawdź, które z podanych odwzorowań są liniowe. Dla tych odwzorowań, które są liniowe podaj przykładową bazę $\ker f$ i bazę $\operatorname{im} f$ oraz określ, czy f jest epimorfizmem lub monomorfizmem.
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$
   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x - y, 3y - x)$
   (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (2x - y, x + 1, y - 6)$
   (d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x - y, z + y, y - 2x, z)$
   (e) $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5)$
2. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = (2x - y, x - 2y, x), \quad g(x,y,z) = (x + y, y - z).$$
   (a) Sprawdź, że są to odwzorowania liniowe i podaj $f(2,3)$, $g(1,0,2)$.
   (b) Znajdź $\ker f$, $\ker g$, $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} g$ oraz ich wymiary.
   (c) Określ $f \circ g$, $g \circ f$.
3. Niech $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z - y, z + 2y = 0\}$ oraz $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie zdefiniowane jako
$$f(x,y,z) = (2x - y, x - 2y, z).$$
   (a) Sprawdź, że jest to odwzorowanie liniowe i podaj $f(-5,1,-2)$, $f(1,0,2)$.
   (b) Znajdź $\ker f$, $\operatorname{im} f$ oraz ich wymiary.
   (c) Czy f jest epimorfizmem lub monomorfizmem.
4. Odwzorowanie liniowe $f\colon X \to Y$ jest określone zależnościami:
   (a) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$, $f(2,1) = (3,1,-1)$, $f(-1,0) = (1,1,0)$
   (b) $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f(1,1,1) = (0,1)$, $f(1,-1,1) = (2,0)$, $f(-1,1,1) = (3,-1)$

   Znajdź $\ker f$, $\operatorname{im} f$ oraz ich wymiary. Określ, czy f jest epimorfizmem lub monomorfizmem.
5. Znajdź odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, jeśli $f(1,1,1,1) = (1,3,3)$, $f(1,0,1,0) = (1,1,-3)$ oraz $\ker f = \{(0,0,z,t) : z,t \in \mathbb{R}\}$.
6. Odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki: $f(2,1,0) = (3,3)$, $f(1,-3,2) = (1,-3)$. Znaleźć obraz wektora $u = (6,-4,4)$. Czy przy powyższych warunkach można znaleźć obraz wektora $v = (5,-1,0)$?
7. Skonstruuj odwzorowanie liniowe wiedząc, że:
   (a) $\ker f = \operatorname{lin}\{(1,1,0),(-1,1,0)\}$ oraz $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}\{(2,1,1)\}$.
   (b) $\ker f = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ oraz $\operatorname{im} f = \{(x,y,z) : 2x = 3y = 6z\}$.
8. Skonstruuj endomorfizm $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taki, że $\ker f = \operatorname{lin}\{u_1,u_2\}$ i $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}\{v_1,v_2\}$, gdzie $u_1 = (1,1,-1,0)$, $u_2 = (1,1,0,1)$, $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1,0)$.