1. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem liniowym, które punktowi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem osi $0x$. Znajdź macierz odwzorowania $A = M_f$ (w bazach kanonicznych).

2. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ będzie odwzorowaniem liniowym, gdzie $f(x,y) = (2x+3y, 2x-3y, 0, x+2y)$:

   (a) Mając dane bazy:
   $B_1 = ((1,0),(0,1))$ $B_1' = ((2,-1),(-1,1))$;
   $B_2 = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
   $B_2' = ((1,0,1,0),(0,-1,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,-1,0))$,
   wyznacz z definicji macierz $A' = M_f(B_1', B_2')$, a następnie wykorzystując odpowiednie macierze przejścia, znajdź macierz $A = M_f(B_1, B_2)$.

   (b) Podaj rząd odwzorowania f.

   (c) Korzystając z macierzy A' oblicz $f(-4,3)$

3. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą przejścia z bazy B do bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^3$ Znajdź bazę B.
   Korzystając z macierzy P wyznacz współrzędne wektora $u = [1,1,1]_B$ w bazie kanonicznej.

4. $B = (v_1, v_2, v_3)$ jest bazą przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ i $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest odwzorowaniem liniowym takim, że $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = -v_2$, $f(v_3) = v_2 - v_3$.

   (a) Podaj macierz $M_f(B)$ i sprawdź, czy f jest izomorfizmem.

   (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą przejścia z bazy B do bazy kanonicznej B_K. Znajdź bazę B.

   (c) Znajdź macierz $M_f(B_K)$.

   (d) Dwoma sposobami, korzystając z $M_f(B)$ oraz $M_f(B_K)$ znajdź $f(2,2,3)$.

5. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie $B_1 = (v_1 = (1,1,-1), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (-1,1,0))$. O odwzorowaniu $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wiadomo, że $\ker g = \operatorname{lin}\{(1,-1,1)\}$, oraz $g(-1,0,2) = (3,-4)$, $g(0,1,0) = (0,1)$.

   (a) Znajdź macierz C odwzorowania g w bazach kanonicznych.

   (b) Korzystając z macierzy A znajdź $f(v_1 + 2v_2)$.

   (c) Znajdź macierz odwzorowania $g \circ f^{-1}$ w bazach kanonicznych.

6. Wiedząc, że macierz endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma w bazach $B_1 = ((1,0),(1,1))$, $B_2 = ((1,1),(0,-1))$ postać $M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sprawdź czy f jest odwzorowaniem odwracalnym. Jeśli tak, to wyznacz wzór na f^{-1}.

7. Niech $A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, a $C = M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierzą odwzorowania $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Znajdź $M_{f\circ g}(B_2, B_2)$, jeśli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3$, $w_2 = -v_1$, $w_3 = -v_2 - v_3$.

8. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wiadomo, że $v_1 = (0, 1, 0)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda_1 = 1$, a $v_2 = (1, 0, -2)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ są wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej $\lambda_2 = 3$. Podaj macierz odwzorowania f w bazie $B = (v_1, v_2, v_3)$ a następnie znajdź $f(1, 2, -1)$.

9. Czy odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest diagonalizowalne? Jeśli tak, to podaj bazę B, w której macierz D odwzorowania f ma postać diagonalną. Podaj tę macierz D oraz nieosobliwą P takie, że $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

   (a) $f(x, y, z) \to (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$

   (b) $f(x, y, z) \to (6x + 4y - 6z, 2y, 4x + 4y - 4z)$

   (c) $f(x, y, z) \to (-x + y - z, -x + y + z, -2x + 2y)$

10. Dany jest endomorfizm $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taki, że $f(x, y, z, t) = (4y + mz, 3y, 2y + mt, y)$. Dla jakich m endomorfizm f jest diagonalizowalny? W takich przypadkach podaj odpowiednią bazę w $\mathbb{R}^4$, w której macierz f ma postać diagonalną.

11. Dane jest odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $f(0, 1, 2) = (0, -1, -2)$, $f(1, 1, 3) = (0, 0, 0)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$. Znajdź przepis f^{100}.

12. Endomorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^3$ spełnia warunki: $f(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $f(2, 2, 0) = (0, 0, 0)$, $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Oblicz $f^{105}(1, 4, 2)$.

13. Niech f będzie endomorfizmem w $\mathbb{R}^3$ takim, że $f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$, $f(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$, $f(-1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Jakie są wartości własne tego odwzorowania? Czy f jest diagonalizowalne? Jeśli tak, to podaj bazę, w której macierz f ma postać diagonalną, oraz tę macierz. Wyznacz $f^{2021}(2, 2, 3)$.

14. Sprawdź, czy dana macierz A jest diagonalizowalna. Jeśli tak, to znajdź macierz diagonalną D i nieosobliwą P takie, że $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. Dane są rekurencyjnie trzy ciągi:

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1}, \\ v_n = 4u_{n-1} + v_{n-1} + 2w_n, \\ w_n = 3w_{n-1}, \end{cases}$$

    gdzie u_0, v_0, w_0 są pewnymi ustalonymi liczbami. Znajdź rozwiązanie ogólne u_n, v_n, w_n.