Teleinformatyka, rok I

2 ZESTAW ZADAŃ Z ANALIZY

1. Udowodnij, korzystając z indukcji matematycznej:
a) $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,
b) $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$,
c) $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; 9 \cdot 3^{4n} + 1$ jest podzielne przez 10,
d) $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$, jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ to ciąg arytmetyczny,
e) $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ to ciąg geometryczny o ilorazie równym q.

2. Zbadaj monotoniczność ciągów o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$
b) $b_n = \cos\frac{\pi}{2n}$ c) $c_n = \sin\frac{\pi n}{2}$
d) $d_n = \frac{n}{1+n}$ e) $e_n = \frac{(-1)^n}{n}$

3. Oblicz (jeżeli istnieje) granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli:

a) $a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$ b) $a_n = \frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$
c) $a_n = \frac{(n+1)\cdot\cos(n!)}{n^3+1}$ d) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$
e) $a_n = \frac{(2n+1)^6-(n-1)^6}{(2n+1)^6+(n-1)^6}$ f) $a_n = \left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{n+4}$
g) $a_n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\right)^n$ h) $a_n = n\cdot\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$
i) $a_n = n[\ln(n+3) - \ln n]$ j) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$
k) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ l) $a_n = 9^n - 8^n + 1$
m) $a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$ n) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$
o) $a_n = \arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$ p) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$
r) $a_n = \sqrt[n]{2^n+4^n+1}$ s) $a_n = \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$
t) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n$ u) $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - n$
w) $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ z) $a_n = \frac{n^{3n}}{(3n)!}\cdot\sin n!$

4. Zbadaj zbieżność i oblicz granicę ciągu, jeżeli:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a_1 = \sqrt{2}, & a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \\ \text{b)} & b_1 > 0, & b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{b_n}\right) \end{array}$$