Teleinformatyka, rok I

6 ZESTAW ZADAŃ Z ANALIZY

1. Sprawdź, czy podane funkcje spełniają twierdzenie Rolle'a na przedziale $\langle -1,1\rangle$. Jeśli tak, to wskaż odpowiedni punkt pośredni realizujący tezę twierdzenia.

$$f_1(x)=x(x^2-1),\quad f_2(x)=\frac{\pi}{4}-\arctan|x|,\quad f_3(x)=\sin\pi x,\quad f_4(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

2. Zastosuj twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji. Podaj odpowiednie punkty pośrednie.

$$f_1(x)=\arcsin x,\ x\in\langle -1,1\rangle;\quad f_2(x)=\arctan x,\ x\in\langle -1,\sqrt{3}\rangle$$

3. Napisz wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanej funkcji f, wskazanego punktu x_0 oraz zadanego n:
a) $f(x)=\frac{x}{x-1},\ x_0=2,\ n=3,$
b) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1,\ n=2.$

4. Wyprowadź wzór Maclaurina dla funkcji $f(x)=\sin x$.

5. Oszacuj błąd wzoru przybliżonego: $\sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3$ dla $|x|\le\frac{1}{2}$.

6. Oblicz:
a) $e^{\frac{-1}{4}}$ z dokładnością do $\frac{1}{100}$,
b) $\ln(1,1)$ z dokładnością do $\frac{1}{1000}$.

7. Dla jakich x odpowiedni wielomian w przybliża daną funkcję f z dokładnością do $\frac{1}{100}$:
a) $f(x)=\sin x,\ w(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$,
b) $f(x)=\cos x,\ w(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

8. Udowodnij wzory:
a) $\mathrm{arctg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
b) $\mathrm{arctg}x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1-x^2},\ x\in(-1,1)$
c) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in[0,+\infty)$

9. Udowodnij, że:
a) $2x \cdot \mathrm{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$,
b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$,
c) $x > \ln(1+x)$ dla $x > 0$.