Teleinformatyka, rok I

7 ZESTAW ZADAŃ Z ANALIZY

1. Zbadaj istnienie ekstremów lokalnych oraz podaj przedziały monotoniczności dla funkcji określonych wzorami:

$$f_1(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}, \ f_2(x) = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2},$$

$$f_3(x) = (x+1)^3 \sqrt[3]{2x^2 - x^3}, \quad f_4(x) = |x^2 - 1|, \ f_5(x) = 5x^3 + 3x^2 + 2x - 5.$$

2. Zbadaj istnienie ekstremów lokalnych funkcji określonych wzorami:
a) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$,
b) $g(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

3. Znajdź najmniejsze i największe wartości funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ na przedziale $\langle 0, 2\rangle$,
b) $g(x) = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ na przedziale $\langle 0, 1\rangle$,
c) $h(x) = |x^2 - 6x - 7|$ na przedziale $\langle 0, 9\rangle$.

4. Zbadaj przebieg zmienności zadanych funkcji i narysuj ich wykresy:
a) $f_1(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
b) $f_2(x) = \sqrt[3]{-x^3 + 3x + 2}$
c) $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
d) $f_4(x) = (x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$
e) $f_5(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}$
f) $f_6(x) = \frac{x}{\ln x}$

5. Znajdź największą objętość stożka obrotowego wpisanego w kulę o promieniu R.

6. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa d i tworzy z jego ścianą boczną kąt α. Dla jakich wartości kąta α objętość graniastosłupa jest największa?

7. Który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i stałej sumie długości krawędzi ma największą objętość?

8. Należy sporządzić skrzynkę prostopadłościenną z pokrywką. Objętość skrzynki ma wynosić 72 cm^3, długości podstawy mają być w stosunku $1 : 2$. Jakiej długości powinny być krawędzie, żeby powierzchnia całkowita była jak najmniejsza?

9. Jakie powinny być wymiary puszki (w kształcie walca) o stałej objętości V, aby jej powierzchnia całkowita była najmniejsza?

10. Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć na rogach protokątnego arkusza kartonu o wymiarach a =30cm, b = 24cm, aby pojemność pudełka po sklejeniu kartonu była największa?

11. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (x_0, y_0)$ ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$), która z dodatnimi półosiami Oxy tworzy trójkąt o najmniejszym polu?

12. W jakim punkcie wykresu funkcji $y = \mathrm{e}^{-x} + 2$ należy poprowadzić styczną, aby trapez ograniczony tą styczną i prostymi $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ ($y \geq 0$) miał największe pole?

13. Na paraboli $y^2 = 4x$ znajdź punkt leżący najbliżej prostej $y = 2x + 4$.