

**Teleinformatyka, rok I**  
**9 ZESTAW ZADAŃ Z ANALIZY**

1. Oblicz całki (jeśli istnieją):

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \quad \int_3^5 \frac{x^2}{\sqrt{(3-x)(x-5)}} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

2. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj zbieżność całek:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{13} dx}{(x^5 + x^3 + 1)^3} \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3 + 1} dx$$

3. Oblicz pole figury (ew. zbadaj jego istnienie):

- a) ograniczonej krzywymi o równaniach:  $y^2 = -x$ ,  $y = x - 6$ ,  $y = -1$ ,  $y = 4$ ,
- b) ograniczonej krzywymi o równaniach:  $y^2 = (x-1)^2$ ,  $y^2 = 2x$  i zawierającej  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,
- c) ograniczonej wykresem funkcji  $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{-x^2+5x-4}}$ , jej asymptotami oraz osią  $0x$ ,
- d) ograniczonej krzywą o równaniu  $y = -x^2 + 4x - 3$  i stycznymi do tej krzywej w punktach  $A = (3, 0)$  i  $B = (0, -3)$ ,
- e) ograniczonej osią  $0x$  i łukiem cykloidy o równaniu  $x = (\phi - \sin \phi)$ ,  $y = (1 - \cos \phi)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,
- f) pętli zadanej parametrycznie

$$\begin{cases} x(t) = 10 - t^2 \\ y(t) = 5t - t^3 \end{cases}$$

4. Oblicz pole obszaru:

- a) ograniczonego krzywą o równaniu  $r = 4 \sin \phi$ ,
- b) ograniczonego krzywą  $(x^2 + y^2)^3 = 8a^2 xy(x^2 - y^2)$ , gdzie  $a > 0$ ,

c) będącego częścią wspólną obszarów ograniczonych krzywymi o równaniach  $x^2 + y^2 = 2x$  oraz  $r = 2 \sin \frac{\phi}{2}$ ,

d) będącego częścią wspólną obszarów ograniczonych krzywymi o równaniach  $(x^2 + y^2)^2 = 12a^2xy$  oraz  $(x^2 + y^2)^2 = 9a^4$ , gdzie  $a > 0$ .

**5.** Oblicz długość krzywych określonych równaniami:

a)  $f(x) = \frac{1}{3}(x - 6)\sqrt{\frac{x}{2}}$ ,  $0 \leq x \leq 16$ ,

b)  $f(x) = 2 \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 5$ ,

c)  $x(t) = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$ ,  $y(t) = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ ,

d)  $x(t) = 4 \cos^5 t$ ,  $y(t) = 4 \sin^5 t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,

e)  $r(\alpha) = 4\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,

f)  $r(\alpha) = 2e^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

**6.** Oblicz pola powierzchni powstałych poprzez obrót dookoła osi  $Ox$  krzywych:

a)  $y = \sqrt{25 - x^2}$ ,  $-2 \leq x \leq 3$ ,

b)  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,

c)  $y = \sqrt{x + 2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ .

**7.** Znajdź objętości brył powstałych poprzez obrót dookoła osi  $Ox$  obszarów płaskich ograniczonych krzywymi o równaniach:

a)  $y = x^2 + 1$  oraz  $y = 3x - 1$ ,

b)  $y = \sqrt{x}e^{x/4}$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ,

c)  $y = \sqrt{x}e^{-x}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,

d)  $y = \arcsin x$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .