

Równania rekurencyjne

- **Permutacje.** Oznaczmy przez a_n liczbę permutacji zbioru $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Każdą taką permutację można otrzymać z permutacji zbioru $[n-1]$ przez wstawienie liczby n na jedno z n miejsc, więc $a_n = na_{n-1}$ i $a_1 = 1$. Stąd $a_n = n!$ (indukcja matematyczna)
- **Proste na płaszczyźnie I.** Na ile spójnych obszarów dzieli płaszczyznę n prostych z których żadne dwie nie są równoległe a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Oznaczmy szukaną liczbę przez a_n . Mamy $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Prowadząc n -tą prostą przetniemy wszystkie $n-1$ poprzednie, a to oznacza że przetniemy na 2 części n obszarów spójnych zwiększając tym samym ich liczbę o n . Mamy więc $a_n = a_{n-1} + n$. Indukcyjnie można pokazać, że $a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$.
- **Proste na płaszczyźnie II.** Ile jest punktów przecięcia n prostych, z których k jest wzajemnie równoległych, jeśli wiadomo, że żadne inne nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w tym samym punkcie? Ponumerujmy kolejne proste nierównoległe (do pierwszych równoległych k prostych) kolejnymi numerami $1, 2, \dots, n-k$. Oznaczmy przez S_i liczbę punktów przecięcia po dorysowaniu i -tej prostej. Oczywiście $S_i = S_{i-1} + k + i - 1$ z warunkiem

$$S_1 = k. \text{ Stąd } S_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} (k + i - 1) = \frac{(n-k)(n+k-1)}{2}$$

Uwaga. W obu zagadnieniach dotyczących prostych na płaszczyźnie przyrosty liczby obiektów w kolejnych krokach tworzą ciągi arytmetyczne

- **Podzbiory bez sąsiadów.** Ile podzbiorów zbioru $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ wliczając zbiór pusty nie zawiera sąsiednich liczb? Oznaczmy szukaną liczbę przez a_n i podzielmy podzbiory tego typu na dwie klasy: te do których nie należy liczba 1 i te do których liczba 1 należy. Tych pierwszych jest tyle ile podzbiorów bez sąsiadów zbioru $\{2, 3, \dots, n\}$, czyli a_{n-1} a tych drugich tyle ile podzbiorów bez sąsiadów zbioru $\{3, \dots, n\}$, czyli a_{n-2} . Stąd $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ przy warunkach początkowych $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
- **Nieporządki.** Nieporządkiem nazywamy permutację bez punktów stałych. Oznaczmy przez D_n liczbę nieporządków permutacji n -elementowej. Oczywiście $D_1 = 0$, $D_2 = 1$. Przyjmijmy, że $D_0 = 1$. Podzielmy nieporządki rzędu n na dwie klasy. Do pierwszej zaliczymy te nieporządki w których n i jakaś inna liczba i zamieniły się miejscami. Liczbę i można wybrać na $n-1$ sposobów. Przy ustalonym i liczba nieporządków w tej klasie wynosi D_{n-2} . Zatem do pierwszej klasy należy $(n-1)D_{n-2}$ nieporządków. Do drugiej klasy zaliczymy

wszystkie pozostałe nieporządki. Na ostatnim miejscu może stać dowolna liczba i ze zbioru $[n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ale wtedy n nie może stać na i -tym miejscu. Zatem przy ustalonym i pozostałe $n-1$ elementów permutujemy tak aby żadne $j \neq n$ nie stało na swoim miejscu i aby n nie stało na miejscu i -tym. Są to nieporządki rzędu $n-1$, gdzie zamiast liczby i jest liczba n pełniąca jej obowiązki. Stąd w drugiej klasie jest $(n-1)D_{n-1}$ nieporządków. Ostatecznie dla $n \geq 2$

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

- **Liczby Bella.** Niech B_n będzie liczbą podziałów zbioru n -elementowego na rozłączne i niepuste podzbiory, których kolejność jest nieistotna. Znajdziemy równanie rekurencyjne na B_{n+1} . Ten zbiór podziału który zawiera element $n+1$ może ponadto zawierać i ($0 \leq i \leq n$) innych elementów. Można je wybrać na $\binom{n}{i}$ sposobów a resztę podziału na B_{n-i} sposobów.

Ostatecznie $B_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i$ z warunkiem $B_0 = 1$.

- Inne przykłady równań rekurencyjnych pojawiają się po omówieniu prawdopodobieństwa warunkowego

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych poprzez funkcje tworzące

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Wówczas szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ nazywamy zwykłą funkcją tworzącą. Wiadomo (wykład z analizy), że } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Jeśli wyrazy ciągu (a_n) rosną zbyt szybko, może się okazać że promień zbieżności zwykłego szeregu

potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest równy 0. Aby ominąć ten problem wprowadzimy wykładniczą funkcję

tworzącą $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ której promień zbieżności jest zwykle dodatni.

Przykłady zastosowań funkcji tworzących

Uzupełnienie: rozwinięcie Taylora $(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$, gdzie $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!}$, $|x| < 1$

dla $r > -1$ szereg jest zbieżny również w punkcie $x=1$ a dla $r > 0$ jest zbieżny w obu punktach brzegowych $x = \pm 1$.

Przykład $(1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-3)(-4) \cdots (-3-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \cdots (k+2)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k$

- **Proste na płaszczyźnie I**

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + n.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + n + 1) x^{n+1} = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \\ &= 1 + x f(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \end{aligned}$$

$$(1-x)f(x) = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (i+1) \right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n(n+1)}{2} \right) x^n \end{aligned}$$

Stąd $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \binom{n+1}{2}.$

- **Proste na płaszczyźnie II**

$$S_0 = 0, S_1 = k \quad S_i = S_{i-1} + k + i - 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + n + 1) x^n = x f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) x^{n+1}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) x^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+k) x^n \right) = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (i+k) \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k+n}{2} (n+1) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k+n-1)n}{2} x^n$$

Stąd $S_n = \frac{n(2k+n-1)}{2}$ a $S_{n-k} = \frac{(n-k)(k+n-1)}{2}.$

- **Nieporządki** $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ dla $n \geq 2$, $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$.

Tworzymy wykładniczą funkcję tworzącą $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n.$

Zauważmy że

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{D_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{k+2}}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(D_{k+1} + D_k)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D_{k+1} + D_k)}{k!} x^{k+1} = \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D_{k+1} + D_k)}{k!} x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{k+1}}{k!} x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} x^k = x g'(x) + x g(x) \end{aligned}$$

Dostaliśmy równanie różniczkowe $(1-x)g'(x) = xg(x)$, które można zapisać w postaci

$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{x}{1-x}$. Z warunkiem początkowym $g(0)=1$ ma ono rozwiązanie $g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Można go

zapisać jako iloczyn dwóch szeregów

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-x)^j}{j!} \right) = \{\text{iloczyn Cauchy'ego}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n.$$

Widać, że $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Stąd $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

- **Liczby Bella** $B_0 = 1$, $B_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i$

Tworzymy wykładniczą funkcję tworzącą $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Wówczas

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{B_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{x^n}{(n-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i e^x = g(x) e^x.$$

Tak więc $\frac{g'(x)}{g(x)} = e^x$ i $g(0)=1$. Stąd $g(x) = e^{e^x - 1}$. Rozwijając w szereg

$$g(x) = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kx} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}, \text{ więc } B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$