Zadania z rachunku prawdopodobieństwa

1 Każda trójka spośród czterech nukleotydów A,C, G i T koduje jeden aminokwas w łańcuchu nici DNA. Ile jest możliwych *a priori* różnych aminokwasów? (Odp $W_4^3 = 4^3 = 64$; $4\cdot3\cdot2=24$ aminokwasów o 3 różnych nukleotydach $4\cdot3\cdot3=36$ aminokwasów o 2 różnych nukleotydach i 4 o wszystkich jednakowych nukleotydach.)

2 Na ile sposobów można rozmieścić 10 różnych kul w 10 ponumerowanych szufladach tak, aby dokładnie dwie szuflady były puste. Odp $\binom{10}{8}\left(\binom{8}{1}\frac{10!}{3!} + \binom{8}{2}\frac{10!}{2!2!}\right) = 1360800000$. Wybieramy niepustych 8 szuflad (lub równoważnie 2 puste) na $\binom{10}{8}$ sposobów, a następnie rozmieszczamy 10 kul w 8 niepustych szufladach. Są możliwe 2 sytuacje w jednej z 8 niepustych komórek będą 3 kule a w pozostałych 7 po jednej lub w dwóch z 8 będą po dwie kule a w 6 pozostałych po jednej). Pierwszą sytuację realizujemy wybierając komórkę z 3 kulami na $\binom{8}{1}$ sposobów i zliczamy ilość nierozróżnialnych permutacji 10 kul (3 kule które trafią do jednej komórki prowadzą to tego samego rozmieszczenia. Podobnie w drugim scenariuszu wybieramy 2 szuflady w której będą po dwie kule na $\binom{8}{2}$ sposobów i zliczamy ilość nierozróżnialnych permutacji 10 kul .

3 *Dziesięć osób zajmuje miejsca przy okrągłym stole. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że osoby* *A* i *B* będą siedzieć obok siebie. Jakie będzie prawdopodobieństwo tego samego zdarzenia jeśli te osoby będą zajmować miejsca w jednym rzędzie? (Odp $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{5}$)

4 Obliczyć czy jednakowe jest prawdopodobieństwo wygrania w loterii zawierającej *n* losów, spośród których jeden wygrywa i w loterii zawierającej *2n* losów, spośród których dwa wygrywają, jeśli:
a) gracz kupuje jeden los, b) gracz kupuje dwa losy. (Odp a) $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$ b) $\frac{2}{n}$, $\frac{2}{n} - \frac{1}{n(2n-1)}$)

5 Dwudziestoosobowa grupa studencka, w której jest 6 kobiet otrzymała 5 biletów do teatru. Bilety rozdziela się drogą losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród posiadaczy biletów znajdą się dokładnie 3 kobiety? (Odp $\frac{C_6^3 C_{14}^2}{C_{20}^5}$)

6 Spośród 20 uczniów do klasówki przygotowało się 5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy losowym podziale klasy na dwie równe grupy w każdej znajdzie się co najmniej jeden uczeń przygotowany do klasówki? (Odp. $1 - 2\frac{C_{15}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{625}{646} \approx 0{,}967$)

7 Rzucamy 4 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczby wyrzuconych oczek tworzą ciąg ściśle rosnący. (Odp. $\frac{C_6^4}{W_6^4}$ Wskazówka –istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy ciągami monotonicznymi a zbiorami)

8 Do tramwaju składającego się z trzech wagonów wsiada 9 pasażerów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a)do każdego wagonu wsiądzie po 3 pasażerów

b)do pierwszego wagonu wsiądzie 4 pasażerów

Odp Wariant I - pasażerowie są rozróżnialni:

a). $\frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{W_3^9} = \frac{9!}{(3!)^3 3^9}$ lub rozkład (dwu)wielomianowy ,

b) $\frac{C_9^4 (C_5^5 + C_5^4 + \cdots + C_5^0)}{W_3^9} = \frac{C_9^4 W_2^5}{W_3^9} = \frac{9!2^5}{4!5!3^9}$ lub rozkład dwumianowy 4 sukcesy w 9 próbach z $p = \frac{1}{3}$)

Wariant II- pasażerowie nierozróżnialni a) $\frac{1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$ b) $\frac{1}{C_{10}^1} = \frac{1}{10}$,gdy rozważymy wagon pierwszy i różny od pierwszego lub $\frac{C_6^1}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$, gdy rozważamy trzy wagony .

9 Z talii 52 kart wybrano 13. Jakie jest prawdopodobieństwo że a) wybrano dokładnie 7 kart jednego koloru, b) wybrano dokładnie 6 kart jednego koloru.

Odp. $a) \frac{C_4^1 C_{13}^7 C_{39}^6}{C_{52}^{13}}$ (wybieramy kolor na C_4^1 sposobów a następnie 7 kart z tego koloru i 6 z pozostałych 39 kart, $b) \frac{C_4^1 C_{13}^6 (C_{39}^7 - C_3^1 C_{13}^6 C_{26}^1 - C_3^1 C_{13}^7)}{C_{52}^{13}} = \frac{104620683024}{635013559600}$ ≈ 0.164753 (jak poprzednio wybieramy kolor na C_4^1 sposobów a następnie 6 kart z tego koloru i 7 z pozostałych 39 kart, co nie wyklucza uzyskania drugiej szóstki a nawet siódemki, odejmujemy więc liczbę $C_3^1 C_{13}^6 C_{26}^1$ wybierając kolor drugiej szóstki C_3^1, szóstki w wybranym kolorze C_{13}^6 i jedną kartę z pozostałych 26 C_{26}^1 i liczbę układów (6+7). Bardziej klarowne rozwiązanie polega na zliczeniu wszystkich możliwych układów 6520, 6511, 6430, 6421, 6331, 6322.

10 Z talii 52 kart wybrano 13. Jakie jest prawdopodobieństwo że a) brak będzie przynajmniej jednego koloru, b) brak będzie dokładnie jednego koloru.

Odp. Oznaczmy przez $A_1, \cdots, A_4$ zdarzenia brak trefli, kar, kierów i pików. Oznaczmy

$$p_1 = P(A_1) = \frac{C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}},\ p_2 = P(A_1 \cap A_2) = \frac{C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}},\ p_3 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}}$$

Ad a) Z wzoru włączeń i wyłączeń mamy prawdopodobieństwo braku co najmniej 1 koloru $b_1 = P(\bigcup_{i=1}^{4} A_i) = 4p_1 - 6p_2 + 4p_3$

Ad b) podobnie jak w pkt a obliczamy prawdopodobieństwo braku co najmniej 2 kolorów

$b_2 = P(A_1 \cap A_2 \cup \cdots \cup A_3 \cap A_4) = 6p_2 - 12p_3$ (3 spośród 15 iloczynów $(A_i \cap A_j) \cap (A_k \cap A_l)$ są puste). Stąd prawdopodobieństwo braku dokładnie 1 koloru jest równe $b_1 - b_2 = 4p_1 - 12p_2 + 16p_3$.

11 Dwie osoby rzucają kolejno monetą. Wygrywa ta osoba, która pierwsza wyrzuci orła. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania dla obu graczy. (Odp. $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$)

12 Trzy osoby rzucają kolejno monetą. Wygrywa ta osoba, która pierwsza wyrzuci orła. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania dla wszystkich graczy. (Odp: $p_1 = \frac{4}{7}$, $p_2 = \frac{2}{7}$, $p_3 = \frac{1}{7}$)

13 W urnie znajduje się *n* białych i *m* czarnych kul. Dwaj gracze wyciągają na zmianę po jednej kuli, zwracając za każdym razem wyciągniętą kulę. Grę prowadzi się dotąd, dopóki którykolwiek z graczy nie wyciągnie białej kuli. Obliczyć, że pierwszy wyciągnie kulę białą gracz rozpoczynający grę. (Odp. $p = \frac{m+n}{2m+n}$)

14 Dwaj strzelcy strzelają kolejno do celu aż do pierwszego trafienia. Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy jednym strzale dla pierwszego strzelca wynosi p_1 a dla drugiego p_2. Znaleźć prawdopodobieństwo, że pierwszy strzelec będzie strzelał większą ilość razy niż drugi.(Odp: $P(A)$= $p_1+(1-p_1)(1-p_2)p_1+(1-p_1)^2(1-p_2)^2 p_1+\ldots = p_1/(1-(1-p_1)(1-p_2))$).

15 Dwaj strzelcy strzelają równocześnie do celu aż do pierwszego trafienia (przez dowolnego strzelca). Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy jednym strzale dla pierwszego strzelca wynosi p_1 a dla drugiego p_2. Znaleźć prawdopodobieństwa wygrania dla obu strzelców, prawdopodobieństwo remisu i prawdopodobieństwo, że gra nigdy się nie skończy.(Odp: P(A)=p_1(1-p_2)/(1-(1- p_1)(1- p_2); P(B)=(1-p_1)p_2/(1-(1- p_1)(1- p_2)) ; P(C)=p_1p_2/(1-(1- p_1)(1- p_2)); $P(D)$=0.

16 Za pomocą indukcji matematycznej udowodnić nierówność

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j).$$

17 Zadanie Banacha. Matematyk nosi przy sobie dwa pudełka zapałek po n zapałek w każdym pudełku. Kiedy potrzebuje on zapałki wybiera losowo pudełko. Obliczyć prawdopodobieństwo, że gdy wybierze on puste pudełko w drugim będzie r zapałek, gdzie r=0,1,...,n. (Odp: $\binom{2n-r}{n}\frac{1}{2^{2n-r}}$)

18 Prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez jeden przekaźnik jest p = 0.9. Przekaźniki działają niezależnie, tzn. niezadziałanie jednego z nich nie ma wpływu na niezadziałanie drugiego. Obliczyć prawdopodobieństwo przekazania sygnału

a)przy połączeniu szeregowym dwu przekaźników, (Odp. p^2=0,81)

b)przy połączeniu równoległym. (Odp. $2p$-p^2=0,99)

19 Zbadać który z układów przedstawionych na rysunku ma większą niezawodność przy założeniu, że przekaźniki działają niezależnie i niezawodność każdego z nich jest p.

(Odp. Niezawodność pierwszego układu jest równa $P_1 = p^2(2-p^2)$ a drugiego $P_2 = p^2(3-3p+p^2)$ $P_1 > P_2 \Leftrightarrow p \in (0,\frac{1}{2})$ stąd dla $p \in (0,\frac{1}{2})$ bardziej niezawodny jest układ pierwszy a dla $p \in (\frac{1}{2},1)$ bardziej niezawodny jest układ drugi Dla $p = \frac{1}{2}$ oba układy mają równą niezawodność.

20 Po upływie pewnego czasu T, każda komórka może zginąć, przeżyć albo podzielić się na dwie, odpowiednio z prawdopodobieństwami ¼, ¼, ½. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po upływie czasu $2T$ będą dwie komórki, gdy na początku była jedna komórka. (Odp: $\frac{9}{32}$)

21 Przypuśćmy, że każda z n pałek została złamana na dwie części – długą i krótką. $2n$ części połączono w n par z których utworzono nowe pałki. Znaleźć prawdopodobieństwo a) że części zostaną połączone w takich samych kombinacjach, w jakich były przed złamaniem, b)że wszystkie długie części będą połączone z krótkimi częściami. (Odp: $P(A)$=$\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2n-3}\cdots\frac{1}{3}\frac{1}{1}$, $P(B)$= $\frac{n}{2n-1}\frac{n-1}{2n-3}\cdots\frac{1}{3}\frac{1}{1}$)

22 Gracz X wymienia liczbę 2 z prawdopodobieństwem q albo 3 z prawdopodobieństwem $1-q$. Podobnie gracz Y musi wymienić jedną z tych liczb. Gdy suma będzie nieparzysta wygrywa gracz X

a gdy parzysta wygrywa gracz *Y*. Jak gracz *Y* ma postępować by zapewnić sobie największe prawdopodobieństwo wygranej, jeżeli zna on wartość *q*?

23 Dwóch ludzi wykonuje po *n* rzutów symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obaj otrzymają tyle samo orłów? (Odp: $\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$)

24 W szafie jest 10 par butów. Wylosowuje się 4 buty. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się co najmniej jedna para. (Odp: $\frac{99}{323}$ przez zdarz. przeciwne- mnożenie prawd. lub losowanie najpierw 4 numerów par z 10 a następnie po jednym bucie z każdej pary $1-\frac{C_{10}^4 2^4}{C_{20}^4}$)

25 W szafie jest *n* par butów. Wybieramy z nich $2r$ ($2r<n$) butów. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród nich

a) nie ma ani jednej pary (Odp : $\frac{C_n^{2r}2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$ (losujemy $2r$ butów z n lewych butów na C_n^{2r} sposobów a następnie każdy but możemy zostawić, lub wymienić na odpowiadający mu prawy na 2^{2r} sposobów

b) znajdzie się dokładnie jedna para. (Odp: $\frac{C_n^1 C_{n-1}^{2r-2}2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$ losujemy najpierw numer pary a następnie z n-1 par butów losujemy 2r-2 butów nie do pary)

c) znajdują się dokładnie 2 pary (Odp: $\frac{C_n^2 C_{n-2}^{2r-4}2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$ losujemy najpierw numer 2 par a następnie z n-2 par butów losujemy 2r-4 butów nie do pary)

26 W klasie jest 10 dziewcząt i 10 chłopców, którym przydzielono arbitralnie i losowo miejsca w 10 dwuosobowych ławkach. Jaka jest szansa, że w każdej ławce będzie siedziała dziewczyna i chłopiec, (Odp : $\frac{(10!)^2 2^{10}}{20!}$ (porównaj z poprzednim zadaniem)

27 Rzucono 5 kości do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przynajmniej na trzech kościach odsłonią się takie same ścianki. (Odp: $\frac{23}{108}$)

28 Znaleźć prawdopodobieństwo, że przy 5 rzutach monety orzeł odsłoni się kolejno co najmniej 3 razy. (Odp: $\frac{1}{4}$)

29 Znaleźć prawdopodobieństwo, że przy 10 rzutach monety orzeł odsłoni się kolejno co najmniej 5 razy. (Odp. $\frac{7}{64}$)

30 Rozwiązać powyższe 2 zadania dla serii jedynek, gdy zamiast monety użyto kości do gry. (Odp: $\frac{1}{81}$, $\frac{31}{6^6}$?)

31 Obliczyć prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą symetrycznych kostek suma oczek 8 wypadnie przed sumą oczek 7.(Odp. $\frac{5}{11}$)

32 W urnie jest *b* białych kul i *c* czarnych. Wyciągamy je kolejno i odkładamy nie sprawdzając koloru. Niech zdarzenie C_n polega na wyciagnięciu za *n*-tym kuli czarnej. Pokazać, że $P(C_n)=\frac{c}{b+c}$, gdy $n\le b+c$.

33 Rzucamy kostką aż do pierwszego wyrzucenia szóstki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będziemy rzucać parzystą liczbę razy? (Odp: $\frac{5}{11}$)

34 Wiadomo, że A, B, C są trzema zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B\mid A)=\frac{1}{4}$, $P(C\mid A\cap B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$, $P(C\mid B)=\frac{1}{3}$. Obliczyć $P(A\mid B\cap C)$.

35 Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem 1/3. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

36 W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15%). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy taksówki twierdzi, ze samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, ze świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

37 Z badań genealogicznych wynika, że kobieta jest nośnikiem hemofilii z prawdopodobieństwem p. Jeżeli kobieta jest nośnikiem hemofilii, to każdy jej syn dziedziczy tę chorobę z prawdopodobieństwem 0,5. Kobieta, która nie jest nośnikiem hemofilii rodzi zdrowych synów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

(a) pierwszy syn będzie zdrowy,

(b) drugi syn będzie zdrowy, jeśli pierwszy będzie zdrowy,

(c) kobieta nie jest nośnikiem hemofilii, jeśli dwaj pierwsi synowie są zdrowi.

38 Wykonujemy 10 kolejnych niezależnych rzutów symetryczną monetą.

Niech S_n oznacza liczbę orłów otrzymaną w początkowych n rzutach. Oblicz $P(S_5=3\mid S_{10}=7)$ Odp($\frac{5}{12}$)

39 Mamy dwóch strzelców. Prawdopodobieństwo trafienia w cel pojedynczym strzałem wynosi dla lepszego z nich 0.8, a dla gorszego 0.4. Nie wiemy, który z nich jest gorszy, a który lepszy. Testujemy strzelców poddając ich ciągowi prób, z których każda polega na oddaniu jednego strzału przez każdego z nich. Test przerywamy po pierwszej takiej próbie, w wyniku której jeden ze strzelców trafił, a drugi spudłował. Następnie ten strzelec, który w ostatniej próbie trafił, oddaje jeszcze jeden strzał. Jakie jest prawdopodobieństwo, iż tym razem także trafi w cel? (Odp. $\frac{26}{35}$)

40 W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedna z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?

41 Do poszukiwania zaginionego rozbitka przydzielono 20 helikopterów. Każdy z nich można skierować do jednego z dwóch rejonów, w których może, odpowiednio z prawdopodobieństwem 1/3 i 1/6, znajdować się rozbitek (z prawdopodobieństwem 1/2 nie

ma go w żadnym rejonie). Każdy helikopter wykrywa znajdującego się w danym rejonie rozbitka z tym samym prawdopodobieństwem $p = 1 - \sqrt[10]{\frac{1}{2}}$ i niezależnie od innych helikopterów. Jak należy rozdzielić helikoptery, by prawdopodobieństwo odnalezienia rozbitka było maksymalne?

42 W pierwszej skrzynce jest 15 jabłek zdrowych i 5 zepsutych. W drugiej skrzynce jest 14 jabłek zdrowych i 6 zepsutych. Wybieramy losowo jedną ze skrzynek i wyciągamy z niej 3 różne jabłka. Obliczyć

(a) prawdopodobieństwo, że wszystkie wybrane jabłka są zdrowe

(b) prawdopodobieństwo, że wybraliśmy drugą skrzynkę, skoro wszystkie jabłka okazały się zdrowe

43 Rzucono dwa razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa od 8 (A), gdy
a) w którymś rzucie wypadnie 5 oczek (B) (Odp: $P(A \mid B) = \frac{5}{11}$)
b) w pierwszym rzucie wypadnie 5 oczek (C)(Odp: $A(A \mid C) = \frac{1}{2}$)

44 Rzucamy trzema kostkami. Wiadomo, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) na żadnej kostce nie wypadła szóstka; b) na pewnej kostce wypadła szóstka? Odp a) $P(A \mid B) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3/6^3}{6 \cdot 5 \cdot 4/6^3} = \frac{1}{2}$ b) $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B) = \frac{1}{2}$

45 Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ogóle nie ma asa? Odp. $\frac{C_{40}^5}{C_{44}^5}$

46 W partii brydża przed licytacją gracz E widzi że nie ma asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jego partner ma 2 asy? Odp. $\frac{C_4^2 C_{35}^{11}}{C_{39}^{13}}$

47 W partii brydża przed licytacją gracz E widzi że ma 8 pików. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jego partner nie ma pików? Odp. $\frac{C_{34}^{13}}{C_{39}^{13}}$

48 Telegraficzne przekazywanie informacji odbywa się metodą nadawania sygnałów kropka, kreska. Statystyczne właściwości zakłóceń są takie, że błędy występują przeciętnie w 2/5 przypadków przy nadawaniu sygnału kropka i w 1/3 przypadków przy nadawaniu sygnału kreska. Wiadomo, że ogólny stosunek liczby nadawanych sygnałów kropka do liczby sygnałów kreska jest 5:3. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przy przyjmowaniu sygnału a) kropka, b) kreska w rzeczywistości te sygnały zostały nadane.

49 W przypadkowych momentach odcinka $[0, T]$ mogą nadejść do odbiornika dwa sygnały. Odbiornik zostaje uszkodzony jeśli różnica w czasie pomiędzy dwoma sygnałami jest mniejsza od t ($t < T$). Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia odbiornika w ciągu czasu T.

50 W koło o promieniu R wpisano trójkąt równoboczny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie 3 spośród 4 postawionych na chybił trafił w danym kole punktów będą leżały wewnątrz trójkąta. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba tych punktów wewnątrz trójkąta ?

51 Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma dwóch losowo wybranych ułamków właściwych (dodatnich lub ujemnych) jest mniejsza od 1 a wartość bezwzględna ich różnicy jest mniejsza niż 1/2.

52 Na odcinku [0,1] umieszczono losowo punkty L i M. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

a) środek odcinka LM należy do $[0,\frac{1}{3}]$,

b) z punktu L jest bliżej do M niż do zera

53 Obliczyć prawdopodobieństwo, że pierwiastki równania $x^2 + 2ax + b = 0$ są rzeczywiste dodatnie, jeżeli (a,b) jest losowo wybranym punktem prostokąta $\{(a,b): |a| < 2, |b| < 1\}$.

54 Na płaszczyźnie poprowadzono proste równoległe odległe na przemian o 2 i 3. Na płaszczyznę rzucono losowo monetę o średnicy 1. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta nie będzie miała punktów wspólnych z żadną z prostych.

55 Kawałek drutu o długości 20 cm zgięto pod kątem prostym w przypadkowo wziętym punkcie. Następnie zgięto drut jeszcze w dwóch punktach, tak by utworzyła się ramka prostokątna o obwodzie 20 cm . Jakie jest prawdopodobieństwo, że pole ramki nie przekroczy 21 cm^2 ?

56 Zadanie Buffona. Płaszczyznę podzielono prostymi równoległymi odległymi o $2a$. Na płaszczyznę tę rzucamy w sposób przypadkowy odcinek o długości $2l<2a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odcinek przetnie jedną z prostych ?

57 Pani X i pani Y idąc z domu do biura mają do przebycia pewien wspólny odcinek drogi AB z tym, że przebywają go w przeciwnych kierunkach. Pani X przybywa do punktu A zaś pani Y do B w przypadkowym momencie czasu pomiędzy godziną 7^{30} i 7^{45} i idzie ze stałą prędkością. Każda z pań przechodzi odcinek AB w ciągu 5 min. Obliczyć prawdopodobieństwo spotkania się pań X i Y.

58 Odcinek o długości 10 cm został podzielony w sposób losowy na 3 części . Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych części można zbudować trójkąt.

59 Punkt X został wybrany losowo z odcinka AB. Pokazać że

a) prawdopodobieństwo że iloraz AX/BX jest mniejszy niż a ($a>0$) jest równe $a/(1+a)$

b) prawdopodobieństwo zdarzenia „stosunek długości krótszej części do dłuższej jest mniejszy niż 1/3 ” jest równe 1/2 .

60 Niech X będzie losowo wybranym punktem z odcinka (0,4). Obliczyć prawdopodobieństwo że pierwiastki równania $x^2 + 4Xx + X + 1 = 0$ są rzeczywiste.

61 Niech X, Y, Z będą losowo wybranymi punktami z przedziału (0,1). Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwiastki równania $Xa^2+Ya+Z=0$ są rzeczywiste.

62 Punkt losowy (a,b) jest jednakowo prawdopodobny na kwadracie $[0,1]^2$. Niech N będzie liczbą pierwiastków rzeczywistych wielomianu $\frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej N.

63 Wiadomo, że $P(A)=0.9$ i $P(B)=0.8$. Wykazać, że $P(A|B)\geq 0.875$

64 Test medyczny wykrywa zachorowanie z prawdopodobieństwem 90%, ale też u zdrowych wskazuje on (błędnie) na chorobę w 0.5% przypadków. Faktyczny udział chorych w populacji wynosi 0.08%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że badana osoba jest faktycznie zdrowa, choć test medyczny wskazuje, że jest ona chora ?

65 Na piętnastu kartkach egzaminacyjnych znajdują się po dwa pytania, które nie powtarzają się. Student jest w stanie odpowiedzieć tylko na 25 pytań. Obliczyć prawdopodobieństwo zdania egzaminu, jeżeli wystarczy odpowiedzieć na dwa pytania z jednej kartki lub na jedno pytanie z pierwszej kartki i wskazane pytanie z drugiej kartki. (Odp. $\frac{190}{203}$)

66 Student ma do przygotowania na egzamin 21 tematów. Z tego opracował jedynie 15 tematów. W czasie egzaminu losuje 3 tematy. W przypadku odpowiedzi na wszystkie pytania otrzymuje piątkę. W przypadku gdy odpowie tylko na 2 pytania losuje z pozostałych tematów trzy dalsze tematy i gdy odpowie na wszystkie pytania otrzymuje czwórkę, gdy zaś odpowie na 2 pytania otrzymuje trójkę. We wszystkich pozostałych przypadkach otrzymuje ocenę niedostateczną. Obliczyć prawdopodobieństwo, że tak przygotowany student otrzyma : a) piątkę, b) czwórkę, c) trójkę d) dwójkę.

67 Wiadomo, że 96% produkcji jest zgodne ze standardem. Uproszczony schemat kontroli jakości przepuszcza przedmioty dobre z prawdopodobieństwem 0.98 a przedmiot wadliwy z prawdopodobieństwem 0.05. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przedmiot, który uproszczona kontrola jakości przepuściła, jest zgodny ze standardem.

68 Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy każdym strzale dla trzech strzelców są odpowiednio równe 4/5 , 3/4 , 2/3 . Wszyscy trzej strzelcy równocześnie strzelili do celu i dwóch z nich trafiło do celu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że chybił trzeci strzelec .

69 Z prętów w kształcie walca o średnicy $2r$ zbudowano kratę o oczku w kształcie prostokąta o wymiarach a , b (mierzonych od osi prętów). Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia w kratę kulką o średnicy d dostatecznie małej w stosunku do oczka kraty, przynajmniej raz w trzech próbach, jeżeli trajektoria lotu jest prostopadła do płaszczyzny kraty.

70 Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa postaci:

x_i	-3	-1	3	5
p_i	0.1	0.2	0.5	0.2

Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej U, jeśli:

$U = 2X + 3$, b) $U = X^3$, c) $U = X^2 - 5$.

71 Wyznaczyć wartość oczekiwaną, medianę, kwantyl $x_{0.3}$, wariancję, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne, współczynnik zmienności, drugi i trzeci moment zwykły, trzeci moment centralny, współczynnik asymetrii zmiennej losowej X.

72 Zmienna losowa X ma rozkład:

x_i	-2	-1	2	5
p_i	0.3	0.1	0.2	0.4

Wyznaczyć dwoma sposobami wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $U=2X-3$

a) znajdując najpierw rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej U oraz

b) korzystając z odpowiednich własności wartości oczekiwanej i wariancji.

73 Wyznaczyć stałą a tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \le 1 \\ 2(1 - \frac{1}{x}) & dla \quad 1 < x \le a \\ 1 & dla \quad x > a \end{cases}$$

była dystrybuantą ciągłej zmiennej losowej X. Obliczyć $P(-1 \le X \le 1.5)$ i zinterpretować je za pomocą wykresu funkcji gęstości.

74 Wykazać, że funkcja P : $\mathcal{B}$ (R) → [0, ∞) zdefiniowana wzorem :

$$P(A) = \begin{cases} \frac{1}{3}|A \cap [0,1)|, & \text{gdy } -1 \notin A \text{ i } 2 \notin A \\ \frac{1}{3}|A \cap [0,1)| + \frac{1}{2}, & \text{gdy } -1 \in A \text{ i } 2 \notin A \\ \frac{1}{3}|A \cap [0,1)| + \frac{1}{6}, & \text{gdy } -1 \notin A \text{ i } 2 \in A \\ \frac{1}{3}|A \cap [0,1)| + \frac{2}{3}, & \text{gdy } -1 \in A \text{ i } 2 \in A \end{cases}$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na prostej R. Wyznaczyć dystrybuantę tego rozkładu.

75 Udowodnić, że funkcja F: R → [0,1] zadana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \le -1 \\ \frac{1}{3}(x+1), & \text{gdy } -1 < x \le 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x^2, & \text{gdy } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa na prostej R. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa części dyskretnej i gęstości części ciągłej tego rozkładu.

76 Udowodnić że funkcja F: R → [0,1] zadana wzorem

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{x}, & \text{gdy } x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x, & \text{gdy } 0\le x<1\\ 1, & \text{gdy } x\ge 1\end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej R. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa części dyskretnej i gęstość części ciągłej tego rozkładu. Obliczyć P ([-1,1/2)) oraz P ((-1/2,3)).

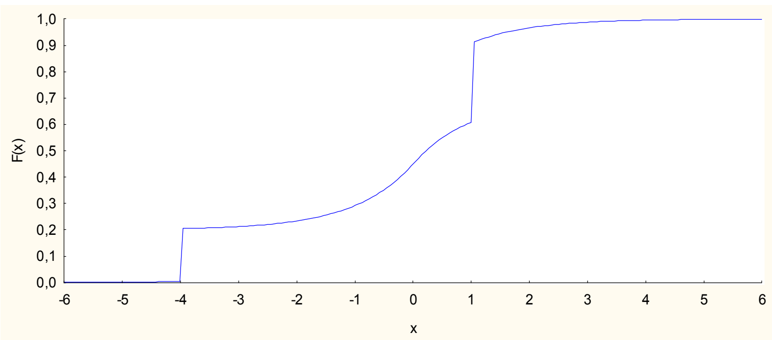
77 Amplituda X kołysania bocznego (wokół osi podłużnej) statku jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X. Obliczyć, czy jednakowo często występują amplitudy większe i amplitudy mniejsze niż $E(X)$.

78 Dany jest rozkład zmiennej losowej X postaci $P^X=0{,}2\,\delta_{\{-4\}}+0{,}3\,\delta_{\{1\}}+f\cdot l$, gdzie $f(x)=ae^{-|x|}$ a l oznacza miarę Lebesgue'a na R.

a. Wyznaczyć dystrybuantę tego rozkładu i naszkicować jej wykres

$$\int_R dP^X=1 \quad\Rightarrow\quad 0{,}2+0{,}3+a\int_R e^{-|x|}dx=1 \quad\Rightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}.$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x}e^{-|t|}dt\ ;\ x\le -4\\ \frac{2}{10}+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x}e^{-|t|}dt\ ;\ -4<x\le 1\\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x}e^{-|t|}dt\ ;\ x>1\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{x}\ ;\ x\le -4\\ \frac{2}{10}+\frac{1}{4}e^{x}\ ;\ -4<x\le 0\\ \frac{45}{100}+\frac{1}{4}(1-e^{-x})\ ;\ 0<x\le 1\\ \frac{75}{100}+\frac{1}{4}(1-e^{-x})\ ;\ x>1\end{cases}$$ (wersja lewostr. cg.)



b. Obliczyć $P(X>0)$ i $P(-0{,}5<X<2)$

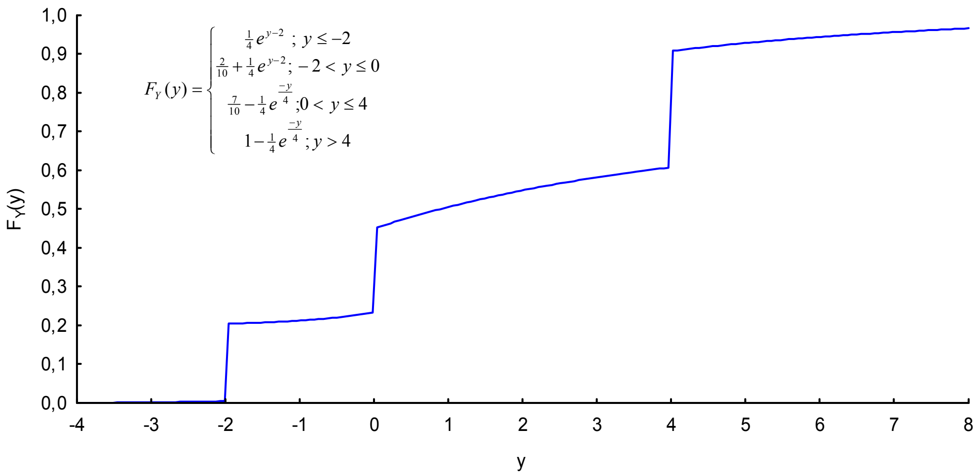
$$P(X>0)=1-P(X\le 0)=1-F(0_+)=0{,}55$$

$$P(-0{,}5<X<2)=F(2)-F(-0{,}5_+)=\tfrac{8}{10}-\tfrac{1}{4}(e^{-2}+e^{-0{,}5})=0{,}6145$$

c. Niech $Y = \begin{cases} X+2, & \text{dla } X < -2 \\ 0, & \text{dla } -2 \le X \le 0 \\ 4X, & \text{dla } X > 0 \end{cases}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Y.

Najpierw wyznaczymy dystrybuantę zmiennej losowej Y.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \begin{cases} F(y-2)\ ; y \le 0 \\ F(\frac{y}{4})\ ; y > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{y-2}\ ;\ y \le -2 \\ \frac{2}{10} + \frac{1}{4}e^{y-2};\ -2 < y \le 0 \\ \frac{7}{10} - \frac{1}{4}e^{\frac{-y}{4}}\ ;0 < y \le 4 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{\frac{-y}{4}}\ ; y > 4 \end{cases}$$



Stąd uzyskujemy rozkład P^Y.

$$P^Y = 0{,}2\,\delta_{\{-2\}} + 0{,}25(1-e^{-2})\,\delta_{\{0\}} + 0{,}3\delta_{\{4\}} + \left(\tfrac{1}{4}e^{y-2}\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(y) + \tfrac{1}{16}e^{\frac{-y}{4}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\right)\cdot l$$

79 Prawdopodobieństwo wykrycia awarii przewodów w ciągu czasu nie większego niż t jest $p(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję czasu T potrzebnego na wykrycie awarii.

80 Punkt materialny M porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu r. Niech P będzie ustalonym punktem okręgu a X odległością punktu M od punktu P. Znaleźć $E(X)$ i $V(X)$.

81 Prędkość X cząsteczek gazu ma rozkład (Maxwella) o gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = Cx^2 e^{-h^2x^2}$, $x \ge 0$, h - ustalone. Wyznaczyć stałą C oraz $E(X)$ i $V(X)$.

82 Prędkość X cząsteczek gazu ma rozkład (Maxwella) o gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \ge 0$. Wyznaczyć rozkład energii kinetycznej $Y = \frac{mX^2}{2}$ oraz $E(Y)$ i $V(Y)$.

83 Wyrazić moment centralny μ_k przez momenty zwykłe i moment zwyczajny m_k przez momenty centralne i przez wartość oczekiwaną m_1.

84 Przez punkt (0,2) poprowadzono prostą w losowo wybranym kierunku. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X będącej odciętą punktu przecięcia tej prostej z osią OX.

85 Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi,\pi)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \sin X$.

86 Zmienna losowa X ma rozkład z rosnącą ciągłą dystrybuantą $F_X(x)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = F_X(X)$.

87 Niech X oznacza czas oczekiwania na pierwszy sukces w nieskończonym ciągu niezależnych prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz wyznaczyć $E(X)$ i $V(X)$.

88 Prawdopodobieństwo tego, że dorosły owad zniesie k jajeczek jest dane przez rozkład Poissona o parametrze λ.Prawdopodobieństwo tego, że z jajeczka rozwinie się dorosły owad, wynosi p. Obliczyć prawdopodobieństwo, że owad ma dokładnie k dorosłych potomków, k=0,1,2,...(Odp: Rozkład liczby potomków jest rozkładem Poissona z parametrem $p\lambda$).

89 Krupier rzuca symetryczną monetą do chwili, gdy wypadnie orzeł. Gdy orzeł wypadnie w k-tym rzucie, krupier wypłaca 2^k złotych, ale gdy orzeł nie wypadnie po sześciu rzutach gracz płaci s złotych i gra się kończy. Ile powinna wynosić opłata s aby gra była sprawiedliwa?

90 Rzucamy 3 razy symetryczną kostką do gry. Jeżeli wypadnie k razy parzysta liczba oczek, to wygrywamy $2k$ złotych, gdzie k=0,1,2,3. Ile powinna wynosić opłata za grę, aby gra była sprawiedliwa, tzn. wartość oczekiwana wygranej była równa zeru.

91 Automat ustawiony na pozycji μ produkuje wałki, których średnica ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$ gdzie σ=0.05. Wałek uważa się za dobry, gdy jego średnica X mieści się w przedziale (20.15, 20.25). Jak powinien być ustawiony automat, aby prawdopodobieństwo wyprodukowania braku było najmniejsze? Jaki procentowo udział w całej produkcji będą miały braki naprawialne (X>20.25), a jaki nie naprawialne (X<20.15), jeżeli automat ustawiono pomyłkowo na pozycji μ=20.23.

92 Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu jednostajnego w:

a) trójkącie $T_1 := \{ (x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le 1 , y \le 1-x \}$,

b) trójkącie $T_2 := \{ (x,y) \in R^2 \mid 0 \le x \le 1 , 1-x \le y \le 1\}$

93 Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają ten sam rozkład jednostajny na przedziale (0, 1). Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z=X+Y$. Znaleźć $E(Z)$ i $V(Z)$.

94 Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają ten sam rozkład N(0, 1). Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$. Znaleźć $E(Z)$ i $V(Z)$.

95 Wyznaczyć rozkład ilorazu dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0,1)$.

96 Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0,0,1,1,\rho)$. Wykazać, że zmienna $Z=Y/X$ ma rozkład o funkcji gęstości $f(z)=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-2\rho z+z^2)}$.

97 Wykazać, że zmienna losowa $U=\frac{X}{X+Y}$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$, gdy X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym.

98 Zmienna (X,Y) ma rozkład o funkcji gęstości $f(x,y)=x+y$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) $X+Y$, b) $X-Y$, c) XY, d) Y/X . (Rohatgi str486)

99 Zmienne losowe $X_1,...,X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_X. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y=\max(X_1,...,X_n)$.

100 Zmienne losowe $X_1,...,X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_X. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y=\min(X_1,...,X_n)$.

101 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o funkcji gęstości $f(x,y)=cxy$, dla $0\le x\le y\le 1$. Wyznaczyć: a) stałą c ,

b) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$ zmiennych X i Y. Czy zmienne X i Y są niezależne?

c) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

d) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres).

102 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o funkcji gęstości $f(x,y)=c(x+y)$, dla $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$. Wyznaczyć:

a) stałą c ,

a) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$ zmiennych X i Y. Czy zmienne X i Y są niezależne?

b) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres), c) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres).

103 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na $\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$. Wyznaczyć : a) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$ zmiennych X i Y. Czy zmienne X i Y są niezależne?

b) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

c) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres).

104 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, \text{ w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$ Wyznaczyć :

a) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$ zmiennych X i Y,

b) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

c) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres).

105 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x<\infty \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$ Wyznaczyć :

a) rozkłady brzegowe zmiennych X i Y - czy zmienne X i Y są niezależne?,

b) rozkłady warunkowe $X|Y$ i $Y|X$,

c) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

d) $P(X\text{-}Y>2|X=10)$, $P(X\text{-}Y>2|1<X<10)$.

106 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y}, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$ Wyznaczyć :

a) rozkłady brzegowe zmiennych X i Y - czy zmienne X i Y są niezależne?,
b) rozkłady warunkowe $X|Y$ i $Y|X$,
c) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres?)

d) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres).

107 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 24y(1-x), & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$ Wyznaczyć :

a) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$ zmiennych X i Y,

b) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

c) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres).

108 Dwuwymiarowa dyskretna zmienna losowa (X,Y) ma rozkład

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{2}{20}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
3	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

.

Wyznaczyć: a) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$ zmiennych X i Y. Czy zmienne X i Y są niezależne?

b) linię regresji pierwszego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

c) prostą regresji drugiego rodzaju zmiennej Y względem X (wykres),

d) rozkład zmiennej losowej $R=\sqrt{X^2+Y^2}$,

e) warunkowy rozkład zmiennej X pod warunkiem $R=1$

109 Zmienna losowa (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład $N(\mathbf{m},\mathbf{V})$, gdzie $\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Wyznaczyć : a) funkcję gęstości $f(x,y)$,

b) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Y)}$,

c) rozkład X pod warunkiem $X+Y=1$.

110 Zmienna losowa (X,Y,Z) ma trójwymiarowy rozkład $N(\mathbf{m},\Sigma)$, gdzie $\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\0 & 4 & 0\\-1 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

Wyznaczyć :
a) funkcję gęstości $f(x,y,z)$,
b) współczynnik korelacji $\rho_{(X,Z)}$,
c) $P(-1<X<2|Y-Z=1)$.

111 Odcinek [0, 1] łamiemy losowo na dwie części, następnie większą część łamiemy losowo na dwie. Punkty łamania mają rozkład jednostajny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z otrzymanych odcinków można zbudować trójkąt.

112 Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów a Y liczbę orłów w 4 pierwszych rzutach. Obliczyć $E(X|Y)$ (Odp. $E(X|Y)=Y+3$)

113 Załóżmy, że X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$, $i=1,2$. Niech $Y=\min(X_1, X_2)$. Wyznaczyć $E(X_1|Y)$. (Odp. $E(X_1 \mid Y)=Y+\frac{1}{2\lambda}$).

114 Załóżmy, że $U_0,U_1,...,U_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale [0,1].Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(max\{U_0,U_1,...,U_n|U_0)$.
(Odp. $\frac{n+U_0^{n+1}}{n+1}$ Wskazówka $max\{U_0,U_1,...,U_n)= max\{U_0, max\{U_1,...,U_n))$

115 Rzucamy symetryczną monetą tak długo aż w dwóch kolejnych rzutach pojawią się "*reszki*". Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów. (Odp. 6) Warunkowanie wynikiem pierwszego rzutu

116 Załóżmy, że X_1, X_2,..., X_n,... są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale [0,1] (ozn. U[0,1]), zaś N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ (ozn. P(λ)) niezależną od X_1, X_1,..., X_n,... Niech $M=\begin{cases}\max(X_1,...,X_n), \text{ gdy } N>0\\ 0, \quad gdy\, N=0\end{cases}$. Oblicz $E(M)$.
(Odp. $E(M)=E(E(M \mid N))=E(\frac{N}{N+1})=1+\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$).

117 Zmienne losowe N i X są niezależne i mają rozkłady prawdopodobieństwa dane następującymi wzorami: $P(N=n)=2^{-n}$, $n=1,2,\ldots$; $P(X>x)=2^{-x}$, $x>0$. Obliczyć $P(X>N)$. (Odp: $\frac{1}{3}$)

118 Załóżmy, że dla danej wartości $\Theta=\theta$, zmienne losowe $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są warunkowo niezależne i mają dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa: $P(X_i=1 \mid \theta)=\theta$, $P(X_i=0 \mid \theta)=1-\theta$. Zmienna losowa Θ ma rozkład jednostajny na przedziale [0,1]. Niech $N=\min\{n: X_n=1\}$. Obliczyć $P(N=n+1 \mid N>n)$ dla n-0,1,2,… . (Odp: $\frac{1}{n+2}$)

119 Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Pokazać, że $V(X_1 \mid X_1+X_2)=E(X_1^2 \mid X_1+X_2)-E^2(X_1 \mid X_1+X_2)$

120 Niech X_1, Y_1, X_2, Y_2,... będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1). Niech f : [0,1]→ [0,1] będzie funkcją mierzalną, $Z_i = \mathbf{1}_{\{f(X_i) > Y_i\}}$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \int_0^1 f(x)dx \quad \text{p.n.}$$

121 Owad składa X jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ , a owad z jajeczka wylęga się z prawdopodobieństwem p , niezależnie od innych. Znaleźć średnią ilość potomków. (Wykorzystać warunkową wartość oczekiwaną).

122 Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$. Znaleźć funkcję charakterystyczna zmiennej XY.

123 Niech $(\Omega, \mathrm{B}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną przy czym μ jest rozkładem $N(m,1)$. Niech $\Im$ będzie podciałem symetrycznych zbiorów borelowskich a ν obcięciem miary μ do $\Im$. Wyznaczyć (o ile istnieje) $\frac{d\nu}{d\mu}$.

124 Zmienne losowe X_1,X_2,... są niezależne i mają ten sam rozkład o $E(X_1)=0$ i $V(X_1)=1$.Wykazać, że $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

125 Zmienne losowe X_1,X_2,... są niezależne i mają tę samą funkcję charakterystyczną φ. Zmienna losowa N jest od nich niezależna i ma rozkład Poissona. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną losowej sumy $Y=X_1+\ldots+X_N$. Zakładając, że φ jest dwukrotnie różniczkowalna w 0 znaleźć $E(Y)$i $V(Y)$.

126 Wykazać, że gdy zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona o parametrze λ, to $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} Y_{N(0,1)}$, gdy $\lambda\to\infty$. (Wskazówka-wykorzystać funkcje charakterystyczne).

127 Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu Laplace'a o gęstości $f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-m|}{\lambda}}$.

128 Zmienne losowe X_1, X_2,... są niezależne i X_k ma rozkład Poissona o parametrze $\lambda_k = 1/2^k$ (k = 1,2,...). Zbadać czy dla ciągu X_k zachodzi prawo wielkich liczb.

129 Zmienne losowe X_1, X_2,... są niezależne i X_k ma rozkład normalny $N(0, \sqrt{k})$ dla k = 1,2,... Zbadać czy dla ciągu X_k zachodzi prawo wielkich liczb.

130 Niech X_k będzie zmienną losową przyjmującą z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z dwóch wartości k^s i $-k^s$. Przy jakim s zachodzi prawo wielkich liczb dla średniej arytmetycznej ciągu X_1,...,X_k ,...takich niezależnych zmiennych losowych.

131 Po terenie miasta jeździ 1000 samochodów. Prawdopodobieństwo wezwania pogotowia technicznego przez jeden samochód wynosi p=0.002. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A)$ wezwania pogotowia przez którykolwiek z samochodów zakładając, że wezwania są zdarzeniami niezależnymi. Podać wynik dokładny i przybliżony uzyskany z aproksymacji rozkładu

dwumianowego rozkładem Poissona. Oszacować teoretycznie błąd tego przybliżenia i sprawdzić jego dokładność w rozważanym przypadku. (Odp. dokł. $P(A)$=0.864935; przybl. $P(A)$=0.864665, oszacowanie błędu: błąd ≤0.004.)

132 Tekst broszury zawiera 100000 znaków. W trakcie pisania każdy znak może zostać błędnie wprowadzony z prawdopodobieństwem 0.001. Z kolei redaktor znajduje każdy z błędów z prawdopodobieństwem 0.9, po czym tekst wraca do autora, który znajduje każdy z pozostałych błędów z prawdopodobieństwem 0.5. Jaka jest szansa, że po obu korektach broszura będzie zawierała nie więcej niż 3 błędy. (Odp. p=0.26503±0.00025)

133 Grupa studentów rozwiązuje test składający się ze 100 pytań. Na każde pytanie możliwe są 4 odpowiedzi. Od ilu poprawnych odpowiedzi począwszy powinno się stawiać ocenę pozytywną, jeżeli prawdopodobieństwo zdania egzaminu przy udzielaniu odpowiedzi na chybił trafił nie powinno być większe niż a) 0,1 b)0,01.(Odp a) $\text{próg} \geq 30{,}5$, b) $\text{próg} \geq 35{,}07$)

134 Waga pasażerów samolotów jest pewną zmienną losową o wartości oczekiwanej μ_1=70 kg i odchyleniu standardowym σ_1=8 kg . Także całkowity ciężar bagażu pasażera (tzn. łącznie z bagażem ręcznym) jest zmienną losową o wartości oczekiwanej μ_2=21 kg i odchyleniu standardowym σ_2=5 kg . Zakładając, że powyższe zmienne losowe są niezależne obliczyć prawdopodobieństwo, że 292 osoby łącznie z bagażem nie ważą więcej niż 26500 kg .

135 Włamywacz -amator posługuje się kluczem do własnego mieszkania jako wytrychem. Udaje mu się w ten sposób otworzyć jedne drzwi na sto. Przyjmijmy że zysk z każdego udanego włamania wynosi 5 000 zł. Ile mieszkań musi odwiedzić ten złodziej, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0.9 uzyskać sumę przekraczającą 200 000 zł.

136 Każda ze 100 pracujących maszyn jest włączona w ciągu 80% całego czasu pracy a włączenia i wyłączenia są losowe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w przypadkowo wybranej chwili jest włączonych więcej niż 70 ale mniej niż 86 maszyn.

137 Prawdopodobieństwo zdarzenia A w pojedynczym doświadczeniu wynosi $p = 0.1$. Znaleźć liczbę doświadczeń n aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0.9 liczba pojawienia się zdarzenia A była nie mniejsza niż 10.

138 Towarzystwo ubezpieczeń wzajemnych ma rezerwę 1000 zł z poprzedniego roku. W bieżącym roku stu klientów wpłaca po 100 zł ubezpieczenia. W przypadku śmierci ubezpieczonego firma wypłaca 4000 zł. Prawdopodobieństwo śmierci każdego z klientów jest jednakowe i równe 0.01. Załóżmy, że przypadki zgonów są niezależne od siebie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że firma nie będzie wypłacalna w danym roku?

139 Niech $X_1,...,X_{100}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości $f(x)=4x(1-x^2)$ dla $0 < x < 1$. Obliczyć $P(50 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 60)$.

140 Niech $X_1,\dots,X_{100}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie beta o gęstości $f(x)=12x(1-x)^2$ dla $0 < x < 1$. Obliczyć $P(25 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 35)$.

141 Komputer dodaje 1200 liczb rzeczywistych z których każdą zaokrągla do najbliższej liczby całkowitej . Zakłada się, że błędy zaokrągleń są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku (-0.5, 0.5). Znaleźć prawdopodobieństwo, że błąd w obliczeniu sumy nie przekroczy 10.

142 Aby stwierdzić jak wielu wyborców popiera obecnie partię ABC losujemy próbkę i na niej przeprowadzamy badanie. Jak duża powinna być ta próbka aby uzyskany wynik różnił się od rzeczywistego poparcia dla partii ABC nie więcej niż o b=3% z prawdopodobieństwem 1-α=0.95. Jaki będzie wynik jeżeli przed losowaniem próbki mamy częściową informację, że poparcie dla ABC nie przekracza 20%? (Odp. 1068; 683)

143 Ośmioł (S. Lem, Dzienniki gwiazdowe) porusza się skokami **na przemian w przód i w tył**. Skoki są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, przy czym skoki w przód mają średnio 1m a skoki w tył średnio 25cm. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ośmioł po wykonaniu 400 skoków oddali się od punktu startowego o 180m lub więcej.

Rozw. Oznaczenia

X_p -wielkość skoku w przód

X_t - wielkość skoku w tył

$Y = X_p - X_t$ -przemieszczenie po jednej sekwencji skoków

$EY = EX_p - EX_t = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$VY = VX_p + VX_t = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$

Skoro Ośmioł wykonał 400 skoków **na przemian w przód i tył.** to wykonał 200 sekwencji skoków $Y_1,\dots,Y_{200}$.

$$P(|\sum_{i=1}^{200} Y_i| \geq 180) = 1 - P(|\sum_{i=1}^{200} Y_i| < 180) = 1 - P(-180-150 < \sum_{i=1}^{200}(Y_i - EY_i) < 180-150) =$$

$$= 1 - P(\frac{330}{\sqrt{200\frac{17}{16}}} < \frac{1}{\sqrt{200}}\sum_{i=1}^{200}\frac{(Y_i - EY_i)}{\sqrt{VY_i}} < \frac{30}{\sqrt{200\frac{17}{16}}}) =$$

$$1 - P(-22{,}6 < \frac{1}{\sqrt{200}}\sum_{i=1}^{200}\frac{(Y_i - EY_i)}{\sqrt{VY_i}} < 2{,}06) \approx 1 - F_{N(0,1)}(2{,}06) \approx 0{,}02$$

144 Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach Poissona $X_n \sim P(\frac{1}{2^n})$. Sprawdzić, czy dla tego ciągu zachodzi CTG

(Wsk. Tw. o dodawaniu i funkcja charakterystyczna)

145 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $P(X_k=1)=p_k$, $P(X_k=0)=1-p_k$.. pokazać, że gdy szereg $\sum_{k=1}^{n} p_k q_k$ jest rozbieżny, to $\frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k)$, gdzie $C_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}$ zbiega wg rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie $N(0,1)$.

(Wsk. Są spełnione zał. tw. Lapunowa.)

146 Zmienne losowe $I_1, I_2, \ldots$ i $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne. Każda ze zmiennych I_i ma taki sam rozkład prawdopodobieństwa: $P(I_i=1)=p$, $P(I_i=0)=1-p$. Każda ze zmiennych X_i ma taki sam rozkład prawdopodobieństwa taki, że $E(X_i)=\mu$ i $V(X_i)=\sigma^2$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i$ oraz $K_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$.

Wyznaczyć granicę (w sensie zbieżności wg. rozkładu) $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n - K_n\mu}{\sqrt{n}}$.

(Wskazówka $\frac{\sum_{i=1}^{n} I_i(X_i-\mu)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}}$ $E(Y_i)=0$ i $V(Y_i)=p\sigma^2$.

147 Zmienna losowa Y_n przyjmuje z prawdopodobieństwem p_n wartość X, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie $N(0,1)$ a z prawdopodobieństwem $1-p_n$ wartość U_n, gdzie U_n jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, r_n^2)$ prze czym $r_n \to \infty$ a $p_n \to p$. Dla jakich p zmienna losowa Y_n zbiega słabo (tzn. wg dystrybuant) do pewnej zmiennej losowej

Rozw. Wyznaczymy najpierw dystrybuantę zmiennej Y_n

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \le y) = P(Y_n \le y \mid Y_n = X)P(Y_n = X) + P(Y_n \le y \mid Y_n = U_n)P(Y_n = U_n) =$$
$$= p_n F_{N(0,1)}(y) + (1-p_n)F_{N(0,r_n^2)}(y) = p_n F_{N(0,1)}(y) + (1-p_n)F_{N(0,1)}(\tfrac{y}{r_n})$$

Dla dowolnego ustalonego y obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = pF_{N(0,1)}(y) + (1-p)F_{N(0,1)}(0) = pF_{N(0,1)}(y) + (1-p)\tfrac{1}{2} = F(y)$$

Widać, że jedynie dla $p=1$ graniczna funkcja $F(y) = pF_{N(0,1)}(y) + (1-p)\frac{1}{2}$ jest dystrybuantą równą $F_{N(0,1)}(y)$. Dla $p<1$ $\lim_{y\to\infty} F(y) = p + (1-p)\frac{1}{2} = \frac{p+1}{2} < 1$ więc $F(y)$ nie jest dystrybuantą.

148 Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$

Rozw. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 1$, czyli $\mathcal{P}(1)$. Oczywiście $E(X_i)=1$ i $V(X_i)=1$. Z tw o dodawaniu dla rozkładu Poissona wynika, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = n$, czyli $\mathcal{P}(n)$.

Wobec tego $P(Y \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}$. Nasze zadanie obliczenia granicy $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ sprowadza się więc do obliczenia

$$\lim_{n\to\infty} P(Y \le n) = \lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i \le n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i) \le 0\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{nV(X_i)}} \le \frac{0}{\sqrt{nV(X_i)}}\right) = \{\text{CTG}\} = F_{N(0,1)}(0) = \frac{1}{2}$$

149 B

Zadania z aktuariatu

1. Urna zawiera 5 kul o numerach: 0, 1, 2, 3, 4. Z urny ciągniemy kulę, zapisujemy numer i kulę wrzucamy z powrotem do urny. Czynność tę powtarzamy, aż kula z każdym numerem zostanie wyciągnięta co najmniej raz. Oblicz wartość oczekiwaną liczby powtórzeń. (Odp. $\frac{137}{12}$).

   Rozw. Fakt- wartość oczekiwana czasu oczekiwania (mierzonego liczbą prób) na sukces w próbach Bernoulliego jest równa odwrotności prawdopodobieństwa sukcesu.

   Oznaczmy N_i -liczba prób aby uzyskać dowolny dotychczas nie uzyskany wynik

   Liczba powtórzeń $N = \sum_{i=1}^{5} N_i$. Stąd $E(N) = \sum_{i=1}^{5} E(N_i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{5}{6-i} = \frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = \frac{137}{12}$

2. Dysponujemy 5 identycznymi urnami. Każda z nich zawiera 4 kule. Liczba kul białych w $-i$ tej urnie jest równa *i*-1, gdzie *i*= 1,2...,5,pozostałe kule są czarne. Losujemy urnę, a następnie ciągniemy z niej jedną kulę i okazuje się, że otrzymana kula jest biała. Oblicz prawdopodobieństwo, że ciągnąc drugą kulę z tej samej urny (bez zwracania pierwszej) również otrzymamy kulę białą. (Odp. $\frac{2}{3}$).

   Rozw. $P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{P(B_1B_2)}{P(B_1)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(B_1B_2 \mid Nr=1)P(Nr=i)}{\sum_{i=1}^{5} P(B_1 \mid Nr=1)P(Nr=i)} = \dfrac{\frac{1}{5}(0+0+\frac{2}{4}\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\frac{2}{3}+\frac{4}{4}\frac{3}{3})}{\frac{1}{5}(0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4})} = \dfrac{2}{3}$

3. Cyfry 1, 2, 3, …, 9 ustawiamy losowo na miejscach o numerach 1, 2, 3, …, 9. Niech X będzie zmienną losową równą liczbie cyfr stojących na miejscach o numerach równych cyfrom. Oblicz wariancję zmiennej losowej X .(Odp. 1).

   Rozw. Oznaczmy $X_i = \begin{cases} 1 \ , i - \text{ta cyfra na swoim miejscu} \\ 0 \ , i - \text{ta cyfra nie na swoim miejscu} \end{cases}$.

   $$X = \sum_{i=1}^{9} X_i \,,\ X_i \sim B(1,\tfrac{1}{9}) \Rightarrow E(X_i) = \tfrac{1}{9} \,,\ Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \,.$$

   $$V(X) = \sum_{i=1}^{9} V(X_i) + \sum_{i\ne j} Cov(X_i, X_j) = 9V(X_1) + 9\cdot 8\,Cov(X_1, X_2) = 9\tfrac{1}{9}\tfrac{8}{9} + 9\cdot 8(\tfrac{1}{9\cdot 8} - \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{9}) = 1$$

4. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, przy czym $E(X) = 4$ i $E(Y) = 6$. Rozważamy zmienną losową $Z = \dfrac{X}{X+Y}$. Obliczyć medianę rozkładu zmiennej losowej Z . (Odp. 0,4).

Rozw. $F_Z(z) = P(Z < z) = P(\frac{X}{X+Y} < z) = P(Y > \frac{1-z}{z}X) = \frac{3z}{2+z}$ dla $0 \le z \le 1$. Stąd $F_Z(z) = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 0.4$.

5. Wylosowano niezależnie 15 liczb z rozkładu symetrycznego ciągłego i ustawiono je w ciąg według kolejności losowania. Otrzymano 8 liczb dodatnich (każdą z nich oznaczmy symbolem *a*) i 7 ujemnych (każdą z nich oznaczmy symbolem *b*). Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymano 6 serii, gdzie serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu: *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu *a* i 2 serie elementów typu *b*).
(Odp. $\frac{14}{143}$).
Rozw.
   - Ile jest różnych 15-elementowych ciągów o 8 elementach *a* i 7 elementach *b* - C_{15}^8 (należy wybrać miejsca dla elementów typu *a*)
   - Na ile sposobów można podzielić 8 elementów na 3 niepuste podzbiory- C_7^2 należy wybrać 2 miejsca podziału pomiędzy 8 elementami- jest 7 miejsc. Podobnie zbiór 7 elementowy można podzielić na C_6^2 sposobów na 3 niepuste podzbiory
   - $P(A) = \frac{2C_7^2C_6^2}{C_{15}^8} = \frac{14}{143}$ - układamy kolejno 6 podzbiorów na przemian zaczynając od zbiorów typu *a* lub *b*.

6. Załóżmy, że zmienne losowe mają łączny rozkład normalny taki, że $E(X) = 1$, $E(Y) = 0$, $V(X) = 2$, $V(Y) = 9$, $Cov(X,Y) = 3$. Obliczyć $Cov(X^2,Y^2)$. (Odp. 18).
Rozw. $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow X \mid Y \sim N(1 + \frac{1}{3}Y, 1)$,

$$Cov(X^2,Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = E(X^2Y^2) - (V(X) + E^2(X))(V(Y) + E^2(Y))$$
$$= E(X^2Y^2) - (2+1)(9+0) = E(X^2Y^2) - 27 = 18 + 27 - 27 = 18$$
$$E(X^2Y^2) = E[E(X^2Y^2 \mid Y)] = E[Y^2 \cdot E(X^2 \mid Y)] = E[Y^2 \cdot (V(X \mid Y) + E^2(X \mid Y))]$$
$$= E[Y^2(1 + (1 + \tfrac{1}{3}Y)^2] = 2E(Y^2) + \tfrac{2}{3}E(Y^3) + \tfrac{1}{9}E(Y^4) = 2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{9} \cdot 3 \cdot 9^2 = 18 + 27$$

7. W urnie znajduje się 20 kul: 10 białych i 10 czarnych. Losujemy bez zwracania 8 kul, a następnie z pozostałych w urnie kul losujemy kolejne 6 kul. Niech S_8 oznacza liczbę wylosowanych kul białych wśród pierwszych 8 wylosowanych kul, a S_6 liczbę kul białych wśród następnych 6 kul. Oblicz $Cov(S_8, S_8 + S_6)$. (Odp. $\frac{12}{19}$).
Rozw. W urnie jest $b = 10$ kul białych i $c = 10$ czarnych. Losujemy bez zwracania $n < b + c$ kul. Niech K oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Oczywiście $P(K = k) = \frac{C_b^k C_c^{n-k}}{C_{b+c}^n}$. Niech $K_i = \begin{cases} 1, \text{ w } i \text{ - tym losowaniu wylosowano kulę białą} \\ 0, \text{ w } i \text{ - tym losowaniu wylosowano kulę czarną} \end{cases}$. Wówczas

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i .$$

$P(K_i = 1) = \frac{b}{b+c}$ -dowód kroku indukcyjnego

$$P(K_i = 1) = P(K_i = 1 \mid K_{i-1} = 1)P(K_{i-1} = 1) + P(K_i = 1 \mid K_{i-1} = 0)P(K_{i-1} = 0)$$
$$= \frac{b-1}{b+c-1}\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+c-1}\frac{c}{b+c} = \frac{b(b+c-1)}{(b+c-1)(b+c)} = \frac{b}{b+c}$$

$K_i \sim B(1, \frac{b}{b+c}), i = 1, \cdots, n$ ale K_i nie są niezależne. Oczywiście $E(K_i) = \frac{b}{b+c}$, $V(K_i) = \frac{b}{b+c}\frac{c}{b+c}$.
$Cov(K_i, K_j) = Cov(K_1, K_2) = E(K_1K_2) - E(K_1)E(K_2) = \frac{b}{b+c}\frac{b-1}{b+c-1} - \frac{b}{b+c}\frac{b}{b+c} = -\frac{bc}{(b+c)^2(b+c-1)}$.

$$S_8 = \sum_{i=1}^{8} K_i, S_6 = \sum_{i=9}^{14} K_i,$$

$$Cov(S_8, S_8 + S_6) = Cov(\sum_{i=1}^{8} K_i, \sum_{i=1}^{14} K_i) = Cov(\sum_{i=1}^{8} K_i, \sum_{i=1}^{8} K_i) + Cov(\sum_{i=1}^{8} K_i, \sum_{i=9}^{14} K_i) =$$

$$= 8V(K_1) + 8 \cdot 7Cov(X_1, X_2) + 8 \cdot 6Cov(X_1, X_2) = 8 \cdot \frac{bc}{(b+c)^2} - 8 \cdot 13 \frac{bc}{(b+c)^2(b+c-1)} = \frac{12}{19}$$

8. Załóżmy, że niezależne zmienne losowe $X_1, ..., X_n$ mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych równych $E(X_i) = \dfrac{1}{i}$, i=1,…,n. Obliczyć $P(X_1 = \min\{X_1, ..., X_n\})$. (Odp $\frac{2}{n^2+n}$)

   Rozw.

$$P(X_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}) = P(X_2 - X_1 > 0, ..., X_n - X_1 > 0) =$$

$$\int_0^\infty P(X_2 - X_1 > 0, ..., X_n - X_1 > 0 \mid X_1 = t) f_{X_1}(t) dt) =$$

$$\int_0^\infty P(X_2 > t, ..., X_n > t) f_{X_1}(t) dt) = \int_0^\infty \prod_{i=2}^{n} (1 - F_{X_i}(t) f_{X_1}(t) dt = \int_0^\infty \prod_{i=2}^{n} e^{-it} e^{-t} dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-(1+2+\cdots+n)t} dt = \int_0^\infty e^{-\frac{n(n+1)}{2}t} dt = \frac{2}{n(n+1)}$$

9. Mamy dwie urny: I i II. Na początku doświadczenia w każdej z urn znajdują się 2 kule białe i 2 czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Obliczyć granicę (przy $n \to \infty$) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w n-tym kroku są jednakowego koloru. (Odp. $\dfrac{3}{7}$).

   Rozw. Sytuacja po każdym losowaniu jest jednoznacznie opisana przez liczbę białych kul w pierwszej urnie. Niech i oznacza liczbę białych kul w pierwszej urnie. Oznaczmy przez I_0,,,,I_4 możliwe stany. Macierz prawdopodobieństw przejścia jest postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$, Stan początkowy $\mathbf{p}_0 = [0,0,1,0,0]$. Wektor prawdopodobieństw

znalezienia się układu w poszczególnych stanach po n krokach jest równy $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$ i może być przybliżony przez $\mathbf{p}_\infty = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^\infty$,który można wyliczyć przechodząc do granicy w równości $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{P}$,więc $\mathbf{p}_\infty = \mathbf{p}_\infty \mathbf{P} \Leftrightarrow$, $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\mathbf{p}_\infty^T = \mathbf{0}$, co oznacza, że wektor $\mathbf{p}_\infty^T$ jest wektorem własnym transponowanej macierzy przejścia $\mathbf{P}^T$, odpowiadającym wartości własnej =1. Stąd $\mathbf{p}_\infty = [\frac{1}{70}, \frac{8}{35}, \frac{18}{35}, \frac{8}{35}, \frac{1}{70}]$. Wektor ten przybliża prawdopodobieństwa bycia układu w poszczególnych stanach po n krokach (n –duże). W kolejnym losowaniu wylosujemy kule tego samego koloru $\Leftrightarrow$ układ pozostanie w tym samym stanie. Oznaczmy S_n -stan układu po n tym losowaniu

$A_n =$ obie kule są tego samego koloru w n - szym losowaniu

$$P(A_{n+1}) = \sum_{i=0}^{4} P(A_{n+1} \mid S_n = i) P(S_n = i) = \tfrac{6}{16}\tfrac{8}{35} + \tfrac{1}{2}\tfrac{18}{35} + \tfrac{6}{16}\tfrac{8}{35} = \tfrac{3}{7}$$

10. Zmienne losowe są niezależne o jednakowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i wariancji 4. Niech $S_5 = \sum_{i=1}^{5} X_i$ i $S_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Oblicz $E(S_5^2 \mid S_{20} = 24)$ (Odp. 51).

Rozw. $\begin{bmatrix} S_5 \\ S_{20} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 80 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow S_5 \mid S_{20} \sim N(5 + \tfrac{1}{4}(S_{20} - 20), 15)$

$\Rightarrow S_5 \mid (S_{20} = 24) \sim N(6,15)$