

Ciało liczb zespolonych

Oznaczmy $C=R \times R$. Elementami zbioru C są pary liczb rzeczywistych. Równość par rozumiemy w naturalny sposób

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2.$$

Zdefiniujemy dodawanie i mnożenie par następująco:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Można łatwo sprawdzić (ćwiczenia), że $(C, +, \cdot)$ jest ciałem przemennym.

Elementem neutralnym dodawania (czyli zerem) jest element (para) $(0,0)$. Elementem przeciwnym do (a_1, a_2) jest element $(-a_1, -a_2)$.

Elementem neutralnym mnożenia (jedyneką) jest para $(1,0)$. Natomiast elementem odwrotnym do

elementu $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ jest $(a_1, a_2)^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$.

Rzeczywiście poszukując elementu odwrotnego (oznaczymy go (x,y)) do $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ musimy rozwiązać równanie

$$(a_1, a_2) \cdot (x, y) = (a_1 x - a_2 y, a_1 y + a_2 x) = (1, 0),$$

co jest równoważne układowi

$$\begin{cases} a_1 x - a_2 y = 1 \\ a_2 x + a_1 y = 0 \end{cases}, \text{ którego rozwiązaniem jest } x = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \quad y = \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Liczba zespolona z to para liczb rzeczywistych $z=(a,b)$. Pierwszy element pary nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z i oznaczmy $a=\operatorname{Re} z$, natomiast drugi element pary nazywamy **częścią urojoną** liczby z i oznaczmy $a=\operatorname{Im} z$.

Widać, że

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$

$$(a,0) \cdot (b,0)=(ab,0)$$

czyli liczby zespolone postaci $(a,0)$ można utożsamiać z liczbami rzeczywistymi. Formalnie

zbiór $\tilde{R} = \{(a,0); a \in R\}$ z powyżej zdefiniowanymi działaniami dodawania i mnożenia par jest ciałem

izomorficznym z ciałem liczb rzeczywistych $(R, +, \cdot)$. Izomorfizm ustanawia odwzorowanie $h(a,0)=a$.

Przyjmując zasadę utożsamiania struktur izomorficznych możemy powiedzieć, że **ciało liczb rzeczywistych $(R, +, \cdot)$ jest podciałem ciała liczb zespolonych $(C, +, \cdot)$.**

Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczmy

$$i=(0,1).$$

Zauważmy że

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0),$$

czyli $i=(0,1)$ jest pierwiastkiem algebraicznym z liczby -1 (spełnia równanie $z^2+1=0$).

Podobnie liczba $-i=(0,-1)$ jest pierwiastkiem algebraicznym z liczby -1 .

Fakt (postać algebraiczna liczby zespolonej). Każdą liczbę zespoloną z można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$z = a + i b ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Powyższą postać nazywamy **postacią dwumienną**. Jest ona wygodna, gdyż działania na liczbach zespolonych zapisanych w postaci dwumiennej wykonujemy tak jak na dwumianach (wielomianach) pamiętając tylko, że $i^2=-1$ i nie musimy pamiętać wzoru definiującego mnożenie oraz dzielenie (mnożenie przez element odwrotny)

Przykład.

$$(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=5+5i$$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Liczbę zespoloną $z = (a,b) = a + i b$ interpretujemy jako punkt na płaszczyźnie. Punkty te potrafimy dodawać i odejmować tak jak wektory na płaszczyźnie. Potrafimy je także mnożyć i dzielić a takich działań nie znamy dla wektorów

Def. Modułem liczby zespolonej $z = (a,b) = a + i b$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Uwaga . Jedyną liczbą zespoloną o module równym 0 jest liczba $(0,0)$

Tw. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ (ćwiczenia)

Def. Liczbę zespoloną $\bar{z} = (a,-b) = a - ib$ nazywamy **liczbą sprzężoną** do liczby $z = (a,b) = a + i b$.

Łatwo pokazać, że prawdziwe są następujące związki

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Ostatnia własność sprzężenia jest szczególnie użyteczna przy dzieleniu liczb zespolonych.

Przykład.

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Każda liczbę zespoloną różną od (0,0) można zapisać w postaci

$$z = a + ib = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = |z| \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Ponieważ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$ możemy oznaczyć

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{i} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Def. Postać $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej $z = (a, b)$ $= a + i b$. Kąt φ nazywamy **argumentem** liczby zespolonej i oznaczmy $\varphi = \text{Arg } z$. Argument jest wyznaczony z dokładnością do wielokrotności kąta 2π .

Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczmy $\varphi = \arg z$. Argument główny jest wyznaczony jednoznacznie. Liczbie (0,0) nie przypisujemy argumentu. Jest ona jednoznacznie wyznaczona przez swój moduł.

Przykład. Zapisać w postaci trygonometrycznej $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Odp. $z = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$

Interpretacja geometryczna mnożenia i dzielenia liczb zespolonych

Przedstawmy liczby w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad (\varphi_1 = \text{Arg } z_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \quad (\varphi_2 = \text{Arg } z_2)$$

Korzystając z wzorów trygonometrycznych otrzymujemy

$$z_1 z_2 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Wobec tego

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2),$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2).$$

Jako szczególny przypadek otrzymujemy (dowód indukcyjny) wzór deMoivre'a

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Przykład. Obliczyć $(-1+i)^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^8 = \sqrt{2}^8 \left(\cos \frac{24\pi}{4} + i \sin \frac{24\pi}{4} \right) = 16$.

Pierwiastki naturalnego stopnia z liczb zespolonych

Dana jest liczba $z = a + i b$.

Pytanie: Czy istnieje liczba zespolona w taka że $w^n = z$?

Jeśli taka liczba w istnieje, to nazwiemy ją pierwiastkiem (algebraicznym) n -tego stopnia z liczby z .

Tw. Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq (0,0)$ istnieje dokładnie n pierwiastków n -tego stopnia z tej liczby.

Dowód. Zapiszmy liczby z i w w postaci trygonometrycznej

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) ; \quad w = |w| (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Z równości $z = w^n$ dostajemy

$$|z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |w|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

a stąd $|z| = |w|^n ; \quad \cos \varphi = \cos n\alpha ; \quad \sin \varphi = \sin n\alpha$.

Wobec tego $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad k=0, \dots, n-1$

Przykład. $\sqrt[6]{1} = \left\{ z_k = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} ; k=1, \dots, 5 \right\}$

(interpretacja graficzna -wierzchołki sześciokąta foremnego)