

Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o wielomianach

Def. Wielomianem rzeczywistym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W: R \rightarrow R$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_k \in R$ dla $0 \leq k \leq n$ oraz $a_n \neq 0$. Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(x) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$.

Def. Wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W: C \rightarrow C$ określoną wzorem

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_k \in C$ dla $0 \leq k \leq n$ oraz $a_n \neq 0$. Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(z) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$.

Każdy wielomian rzeczywisty można traktować jako szczególny wielomian zespolony.

Wielomian rzeczywisty lub zespolony nazywać będziemy krótko **wielomianem**.

Równość wielomianów

Wielomiany P i Q są równe gdy $\forall x \in R(C) \quad P(x) = Q(x)$.

Tw. Wielomiany są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach

Suma, różnica i iloczyn wielomianów (rzeczywistych lub zespolonych)

$$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)$$

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Oczywiście suma różnica i iloczyn wielomianów są nadal wielomianami.

Def. Liczbę rzeczywistą (zespoloną) x_0 nazywamy **pierwiastkiem** rzeczywistym (zespolonym) wielomianu W jeżeli $W(x_0) = 0$.

Def. Liczba x_0 jest **pierwiastkiem k -krotnym** wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(x) = (x - x_0)^k P(x)$ i $P(x_0) \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy zespolony wielomian stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (przy czym k -krotne miejsce zerowe liczymy k razy).

Wnioski z zasadniczego twierdzenia algebry

- Niech wielomian zespolony $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma pierwiastki zespolone z_j o krotnościach k_j gdzie $k_j \in \mathbb{N}$ dla $1 \leq j \leq m$ oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Wtedy

$$W(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}.$$
- Jeżeli liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych to liczba zespolona sprzężona $\overline{z_0}$ również jest pierwiastkiem tego wielomianu (**dowód – ćwiczenia**)
- Każdy wielomian rzeczywisty stopnia $n \in \mathbb{N}$ można zapisać w postaci

$$W(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$
gdzie $(k_1 + \dots + k_r) + 2(l_1 + \dots + l_s) = n$ a $x_1, \dots, x_r$ są rzeczywistymi pierwiastkami wielomianu o krotnościach $k_1, \dots, k_r$. (**dowód – ćwiczenia**)

Przestrzenie liniowe (wektorowe)

Intuicja. Przestrzeń liniowa to zbiór obiektów zwanych wektorami, które umiemy dodawać i mnożyć przez skalary (liczby)

Def. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem przemiennym a V pewnym zbiorem (niepustym). Niech będą dane dwa działania

$$\oplus : V \times V \rightarrow V \quad (\text{działanie wewnętrzne w zbiorze } V) \text{ i}$$

$$\odot : K \times V \rightarrow V \quad (\text{działanie zewnętrzne w zbiorze } V \text{ nad zbiorem } K)$$

Przestrzenią liniową (inaczej wektorową) V nad ciałem K nazywamy czwórkę $(V, (K, +, \cdot), \oplus, \odot)$ jeżeli są spełnione następujące warunki (postulaty)

- $(V, \oplus)$ jest grupą abelową
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})$
- $\forall \mathbf{x} \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})$
- $\forall \mathbf{x} \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x})$
- $\forall \mathbf{x} \in V \quad 1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Elementy zbioru V nazywamy wektorami a elementy ciała K skalarami.

Działanie wewnętrzne $\oplus$ nazywamy dodawaniem wektorów a działanie zewnętrzne $\odot$ nazywamy mnożeniem wektora przez skalar.

Przykłady przestrzeni liniowych

- Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem a $V=K^n$. Elementami zbioru V są więc n - elementowe ciągi skalarów postaci $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$. Działania definiujemy następująco:

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \odot (y_1, \dots, y_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Można sprawdzić (ćwiczenia), że struktura $(K^n, (K, +, \cdot), \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową. W szczególności $(R^n, (R, +, \cdot), \oplus, \odot)$, $(C^n, (C, +, \cdot), \oplus, \odot)$, $(C^n, (R, +, \cdot), \oplus, \odot)$ są przestrzeniami liniowymi.

- Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych a $V=W_{[n]}$ będzie zbiorem wielomianów (rzeczywistych lub zespolonych) stopnia co najwyżej n . Dodawanie $\oplus$ wielomianów i mnożenie wielomianu przez liczbę $\odot$ definiujemy w zwykły sposób.

Struktura $(W_{[n]}, (K, +, \cdot), \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową.

- Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych a $V=W$ będzie zbiorem wielomianów (rzeczywistych lub zespolonych) bez ograniczenia na stopień.

Struktura $(W, (K, +, \cdot), \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową

Uwaga. Wszystkie wymienione powyżej przykłady przestrzeni liniowych są szczególnym przypadkiem przestrzeni liniowej zdefiniowanej poniżej

- Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych a $V=\mathcal{F}$ będzie zbiorem funkcji odpowiednio rzeczywistych lub zespolonych określonych na tej samej dziedzinie D . Dodawanie funkcji i mnożenie funkcji przez liczbę określamy wzorami

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\forall \alpha \in K, \forall f \in \mathcal{F} \quad (\alpha \odot g)(x) = \alpha f(x).$$

Struktura $(\mathcal{F}, (K, +, \cdot), \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie. Sprawdzić, że podane powyżej struktury są rzeczywiście przestrzeniami liniowymi.

Umowa. Z uwagi na prostotę zapisu rezygnujemy z symbolów $(\oplus, \odot)$ na rzecz $(+, \cdot)$. Trzeba teraz odróżniać dodawanie wektorów od dodawania skalarów (elementów ciała- liczb) oznaczane tym samym symbolem $(+)$, oraz mnożenie wektora przez skalar od mnożenia skalarów oznaczane $(\cdot)$.

Przy tym rozróżnieniu nie prowadzi to do nieporozumień. Dla uproszczenia będziemy też zapisywać przestrzeń w postaci $(V, K, +, \cdot)$ pomijając jawne wypisywanie działań w ciele K

W przestrzeni liniowej $(V, K, +, \cdot)$ prawdziwe jest następujące

Tw. a) $\forall \mathbf{v} \in V \quad 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

b) $\forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

c) $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$

d) $\forall \alpha \in K \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad -(\alpha \cdot \mathbf{v}) = (-\alpha) \cdot \mathbf{v}$

Dowód. a) $0 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{v} = (0+1) \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Stąd $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

b) $\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{v}$. Stąd $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

c) Jeżeli $\alpha \neq 0$ to teza jest prawdziwa. Jeżeli $\alpha \neq 0$ to istnieje α^{-1} takie że $\alpha^{-1}\alpha = 1$

$$\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} / \alpha^{-1} \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

d) $\alpha \cdot \mathbf{v} + (-\alpha) \cdot \mathbf{v} = (\alpha + (-\alpha)) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Stąd $-(\alpha \cdot \mathbf{v}) = (-\alpha) \cdot \mathbf{v}$

Podprzestrzeń liniowa

Def. Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową a $U \subset V$ będzie **niepustym** podzbiorem zbioru V .

Jeżeli struktura $(U, K, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, to U nazywamy podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V .

Tw. $U \subset V$ jest podprzestrzenią przestrzeni $V \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U & \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \\ \forall \alpha \in K \ \forall \mathbf{x} \in U & \alpha \mathbf{x} \in U \end{matrix}$

Komentarz. Powyższe dwa warunki gwarantują że działanie $(+)$ jest wewnętrzne w U a działanie $(\cdot)$ jest działaniem zewnętrznym w U nad zbiorem K . Dowód implikacji $\Rightarrow$ jest oczywisty, natomiast dowód $\Leftarrow$ polega na sprawdzeniu warunków z definicji przestrzeni (**sprawdzić te warunki!**). Np. zakładając, że spełnione są 2 warunki z prawej strony powyższej równoważności i korzystając z poprzedniego twierdzenia mamy

$$\mathbf{x} \in U \Rightarrow (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \in U \text{ \{ bo } \Rightarrow \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in U.$$

Podprzestrzeń U przestrzeni V musi więc zawierać wektor zerowy przestrzeni V .

Liniowa kombinacja wektorów

Def. Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową. Wektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$ gdzie $\alpha_i \in K$, $\mathbf{v}_i \in V$; $i=1, \dots, n$ nazywamy liniową kombinacją wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Przykłady kombinacji liniowych

- W przestrzeni $(R^3, (R, +, \cdot), +, \cdot)$ wektor $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ jest liniową kombinacją wektorów

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ o współczynnikach odpowiednio } 2, -3, 1.$$

- Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

W przestrzeni $(\mathcal{F}, (R, +, \cdot), +, \cdot)$ funkcja $f(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 \ln(1+t^2) + \alpha_3 \sin t + \alpha_4$ jest liniową

kombinacją funkcji $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = \ln(1+t^2)$, $f_3(t) = \sin t$, $f_4(t) = 1$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.