

Liniowa niezależność wektorów

Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K

Def. Wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nazywamy **liniowo niezależnymi**, gdy prawdziwa jest implikacja

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n \quad \alpha_i = 0,$$

tzn. z zerowania się liniowej kombinacji wynika zerowanie się wszystkich jej współczynników.

Jeżeli wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nie są liniowo niezależne, to są one **liniowo zależne**.

Wniosek. Wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, nie

wszystkie równe 0 takie, że $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$

Uwagi.

- Dowolny niezerowy wektor jest liniowo niezależny (wniosek z faktu $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$).
- Wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest liniową kombinacją pozostałych wektorów.

Rzeczywiście z definicji liniowej zależności wynika, że $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ i co najmniej jeden ze

współczynników jest niezerowy (powiedzmy $\alpha_1 \neq 0$). Stąd $\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^n \left(\frac{-\alpha_i}{\alpha_1} \right) \mathbf{v}_i$.

Def. Skończony zbiór wektorów $A = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ nazywamy liniowo niezależnym jeżeli wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo niezależne. nieskończony zbiór B wektorów nazywamy liniowo niezależnym, jeżeli każdy jego skończony podzbiór A jest liniowo niezależny.

Powłoka liniowa

Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K , a zbiór $A \subset V$ będzie pewnym niepustym zbiorem wektorów przestrzeni V .

Def. Powłoką liniową zbioru $A \subset V$ nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A , który oznaczamy: $\text{span } A$ lub $\text{lin } A$.

Tw. Powłoka liniowa $U = \text{span } A$ jest podprzestrzenią przestrzeni V (zwaną **podprzestrzenią generowaną** przez zbiór wektorów A)

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że spełnione są warunki $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ i $\forall \alpha \in K \quad \forall \mathbf{x} \in U \quad \alpha \mathbf{x} \in U$. Są one

spełnione, bo suma dwóch liniowych kombinacji wektorów z A jest liniową kombinacją wektorów z A i liniowa kombinacja wektorów z A pomnożona przez skalar jest liniową kombinacją wektorów z A .

Baza, wymiar

Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K .

Def. Mówimy, że zbiór $B \subset V$ wektorów jest **bazą** przestrzeni liniowej V jeżeli

- B jest zbiorem liniowo niezależnym
- $\text{span } B = V$

Dowodzi się następujące twierdzenia (dowody pomijamy):

Tw. Każda nietrywialna przestrzeń liniowa V (czyli różna od $V = \{0\}$) posiada bazę.

Tw. Dwie różne bazy tej samej przestrzeni są równoliczne.

Def. Jeżeli przestrzeń V ma bazę skończoną $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, to mówimy, że jest to przestrzeń **skończenie wymiarowa o wymiarze n** i piszemy $\dim V = n$. W tym przypadku bazę traktujemy jako zbiór uporządkowany $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Jeżeli nie istnieje baza skończona, to przestrzeń nazywamy **nieskończenie wymiarową**.

Wymiar przestrzeni składającej się tylko z wektora zerowego jest równy 0.

Przykłady

- $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią n wymiarową. Bazą jest uporządkowany zbiór wektorów $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, gdzie $\mathbf{e}_j = (0, \dots, \underset{j\text{-te miejsce}}{1}, \dots, 0)$, $j=1, \dots, n$. Bazę tą nazywamy **bazą kanoniczną** przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ jest przestrzenią n wymiarową z bazą kanoniczną jak powyżej
- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią $2n$ wymiarową z bazą $B = (\mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ gdzie $\mathbf{e}_j = (0, \dots, \underset{j\text{-te miejsce}}{1}, \dots, 0)$ $\tilde{\mathbf{e}}_j = (0, \dots, \underset{j\text{-te miejsce}}{i}, \dots, 0)$ (i oznacza tu jednostkę urojoną), $j=1, \dots, n$.
- $(W_{[n]}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ($W_{[n]}$ zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n) jest przestrzenią $n+1$ wymiarową z kanoniczną bazą jednomianów $B = (1, x, x^2, \dots, x^n)$
- $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ (W zbiór wielomianów rzeczywistych) jest przestrzenią nieskończenie wymiarową z przeliczalną bazą jednomianów $B = (1, x, x^2, \dots)$

Tw. Jeżeli $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest uporządkowaną bazą skończenie wymiarowej przestrzeni V , to każdy wektor tej przestrzeni da się jednoznacznie przedstawić w postaci liniowej kombinacji wektorów bazy.

Dow. Możliwość takiego przedstawienia jest konsekwencją faktu $\text{span } B = V$. Wystarczy więc pokazać jednoznaczność takiego przedstawienia. Załóżmy, że istnieją dwa takie przedstawienia

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k \text{ i } \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k. \text{ Stąd } \mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k - \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) \mathbf{v}_k.$$

liniowej niezależności wektorów bazy mamy $\forall 1 \leq k \leq n \quad \alpha_k - \beta_k = 0$, czyli $\alpha_k = \beta_k \quad (\forall k)$.

Def. Jednoznacznie wyznaczone współczynniki kombinacji liniowej z poprzedniego twierdzenia nazywamy **współrzędnymi** wektora $\mathbf{v}$ w bazie $B=(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Wnioski.

- Każdy układ n liniowo niezależnych wektorów przestrzeni n wymiarowej tworzy bazę tej przestrzeni.
- Każdy układ m wektorów przestrzeni n wymiarowej jest liniowo zależny, gdy $m > n$.

Odwzorowania (przekształcenia, transformacje) liniowe

Niech $(V, K, +, \cdot)$ i $(W, K, +, \cdot)$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K .

Def. Odwzorowanie $T: V \rightarrow W$ nazywamy **odwzorowaniem liniowym (homomorfizmem)** jeśli

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \quad T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$ (addytywność T)
2. $\forall \mathbf{v} \in V \quad \forall \alpha \in K \quad T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$ (jednorodność T)

Odwzorowanie liniowe (homomorfizm) $T: V \rightarrow W$ będące **injekcją** nazywamy **monomorfizmem**.

Odwzorowanie liniowe (homomorfizm) $T: V \rightarrow W$ będące **surjekcją** nazywamy **epimorfizmem**.

Odwzorowanie liniowe (homomorfizm) $T: V \rightarrow W$ będące **bijekcją** nazywamy **izomorfizmem**.

Odwzorowanie liniowe (homomorfizm) $T: V \rightarrow V$, to nazywamy **endomorfizmem**.

Równoważnie warunki 1 i 2 można zapisać w postaci

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \quad T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2).$$

Wniosek. Dla dowolnego przekształcenia liniowego $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

Przykłady przekształceń liniowych

- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3)$
- $T: W_{[3]} \rightarrow W_{[4]} \quad T(w(x)) = 2w'(x) + x w(x-1)$
- Niech V będzie przestrzenią liniową rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ i niech K będzie rzeczywistą funkcją ciągłą na kwadracie $[0,1] \times [0,1]$. Przekształcenie $T: V \rightarrow V$

$$\text{określamy w następujący sposób: } T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Zadanie. Sprawdzić, że powyższe przekształcenia są przekształceniami liniowymi.

Uwaga. Przekształcenie $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $T(x)=ax+b$ jest liniowe tylko wówczas gdy $b=0$.

Def. Jądrem przekształcenia liniowego $T: V \rightarrow W$ nazywamy zbiór

$$\text{Ker} T = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = T^{-1}[\mathbf{0}] \quad (\text{przeciwobraz wektora zerowego})$$

Def. Obrazem przekształcenia liniowego $T : V \rightarrow W$ nazywamy zbiór

$$\text{Im } T = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \quad \mathbf{w} = T(\mathbf{v})\}$$

Tw. Jądro przekształcenia liniowego $T : V \rightarrow W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V a obraz jest podprzestrzenią przestrzeni W .

Dowód. (Zrobić na ćwiczeniach)

Zadanie. Dla zdefiniowanych wcześniej przekształceń liniowych $T : R^3 \rightarrow R^3$ i $T : W_{[3]} \rightarrow W_{[4]}$ znaleźć jądro.

Tw. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią ($\dim V = n$) a $T : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Wówczas

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T.$$

Dowód. Niech $\dim \text{Ker } T = k \leq n$ (bo $\text{Ker } T$ jest podprzestrzenią przestrzeni V). Niech $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ będzie bazą jądra (każda przestrzeń ma bazę, więc podprzestrzeń także). Uzupełniamy wektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ do bazy w V dokładając wektory $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Pozostaje wykazać, że $\dim \text{Im } T = n - k$. Aby to zrobić wykazemy, że wektory $T(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{e}_n)$ tworzą bazę podprzestrzeni $\text{Im } T$.

W tym celu należy pokazać, że

1. $T(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{e}_n)$ są liniowo niezależne.
2. $\text{span}\{T(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{e}_n)\} = \text{Im } T$.

Ad 1. $\sum_{i=k+1}^n a_i T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow \{\text{liniowość } T\} T(\sum_{i=k+1}^n a_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=k+1}^n a_i \mathbf{e}_i \in \text{Ker } T \Rightarrow \{\text{Ker } T \text{ jest podprzestrzenią}\} \sum_{i=k+1}^n a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{e}_i \Rightarrow -\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=k+1}^n a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \{\text{liniowa niezależność } \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall k+1 \leq i \leq n.$

Ad 2. Weźmy dowolny wektor $\mathbf{w} \in \text{Im } T$. Istnieje więc $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ taki, że $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Stąd

$$\mathbf{w} = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i) = T(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i) = T(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i T(\mathbf{e}_i).$$

Tw. Niech V i W będą przestrzeniami skończenie wymiarowymi ($\dim V = n, \dim W = m$) a $T : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Wówczas

1. T jest injekcją (monomorfizmem) $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$ ($\Leftrightarrow \dim \text{Im } T = \dim V$)
2. T jest surjekcją (epimorfizmem) $\Leftrightarrow \dim \text{Im } T = \dim W = m$

Dowód. (Ad 1 $\Rightarrow$ dow. nie wprost) Niech $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_1 \in \text{Ker } T$, czyli $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. Wobec tego dla dowolnego $\mathbf{v} \in V$ mamy $T(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v})$, więc T nie jest injekcją - sprzeczność

(Ad 1 $\Leftarrow$) $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) \Leftrightarrow T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \Leftrightarrow T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \text{Ker } T = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, więc T jest injekcją

(Ad 2. $\Rightarrow$) oczywiste. (Ad 2. $\Leftarrow$) Jeśli $\text{Im } T$ jest m wymiarową podprzestrzenią przestrzeni m wymiarowej, to jest całą przestrzenią.