

Macierze

Niech $N_p = \{1, \dots, p\}$ będzie zbiorem początkowych liczb naturalnych. Niech K oznacza ciało-zwykłe ciało liczb rzeczywistych R lub zespolonych C . Rozważmy zbiór $N_p \times N_q$ par liczb naturalnych.

Def. Macierzą typu (p, q) (inaczej o wymiarach $p \times q$) nazywamy funkcję

$$\mathbf{A} : N_p \times N_q \ni (i, j) \rightarrow \mathbf{A}(i, j) = a_{ij} \in K.$$

Wartości $\mathbf{A}(i, j) = a_{ij}$ funkcji $\mathbf{A}$ na elementach (i, j) nazywamy elementami macierzy.

Jeśli elementy są liczbami rzeczywistymi (zespolonymi), to macierz nazywamy rzeczywistą (zespoloną). Elementy te można zestawić w postaci prostokątnej tablicy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i - \text{ta wiersz} \\ j - \text{ta kolumna} \end{array}$$

Szczególne typy macierzy

- kwadratowa - tzn. $p=q$ - elementy $a_{11}, \dots, a_{pp}$ tworzą tzw. główną przekątną

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

- diagonalna - tzn. kwadratowa z zerowymi elementami poza główną przekątną

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

- jednostkowa – diagonalna z elementami na przekątnej równymi 1 – oznaczenie **E** lub **I**)

$$\mathbf{I} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}$$

- trójkątna dolna i górna

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pi} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \quad \text{i górna} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}.$$

- zerowa - o wszystkich elementach równych 0- oznaczenie **O**

Działania na macierzach

Ponieważ macierze to szczególne funkcje równość macierzy rozumiemy tak jak równość funkcji.

Def. Dwie macierze są **równe**, gdy są tego samego typu i odpowiednie elementy obu macierzy są sobie równe.

- Dodawanie i odejmowanie macierzy tego samego typu

$$\text{Niech } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = [b_{ij}] \quad .$$

$$\text{Wówczas } \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1j} \pm b_{1j} & \cdots & a_{1q} \pm b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} \pm b_{i1} & \cdots & a_{ij} \pm b_{ij} & \cdots & a_{iq} \pm b_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} \pm b_{p1} & \cdots & a_{pj} \pm b_{pj} & \cdots & a_{pq} \pm b_{pq} \end{bmatrix} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

- Mnożenie macierzy $\mathbf{A}$ przez liczbę c

$$c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c a_{11} & \cdots & c a_{1j} & \cdots & c a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c a_{i1} & \cdots & c a_{ij} & \cdots & c a_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c a_{p1} & \cdots & c a_{pj} & \cdots & c a_{pq} \end{bmatrix} = [c a_{ij}]$$

- Transpozycja macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (p,q) nazywamy macierz typu (q,p) postaci $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$, która powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ przez zamianą wierszy na kolumny i odwrotnie.

Wnioski

- $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
- $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$
- $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

Wniosek. Zbiór macierzy tego samego typu z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar tworzy przestrzeń liniową nad danym ciałem K . Elementem neutralnym dodawania jest macierz zerowa. Macierzą przeciwną do macierzy $\mathbf{A}$ jest macierz $-\mathbf{A}$.

Dla macierzy można określić jeszcze w pewnych przypadkach określić

- Mnożenie macierzy (uwaga na rozmiary macierzy !)

$$\mathbf{A}_{(p,m)} = [a_{ik}], \quad \mathbf{B}_{(m,q)} = [b_{kj}], \quad \mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{(p,q)} = \left[\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right].$$

Przykłady

$$1. \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{Wniosek } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$2. \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{Wniosek. } \mathbf{AB}=\mathbf{AC}, \text{ lecz } \mathbf{B} \neq \mathbf{C}$$

$$3. \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} . \text{ Iloczyn } \mathbf{AB} \text{ istnieje a } \mathbf{BA} \text{ nie.}$$

Własności mnożenia macierzy (o ile iloczyny istnieją)

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

$$\mathbf{AE}=\mathbf{A} \quad \mathbf{EA}=\mathbf{A} \text{ (uwaga na wymiary)}$$

Reprezentacja macierzowa przekształcenia liniowego przestrzeni skończenie wymiarowych

Niech V i W będą przestrzeniami skończenie wymiarowymi i $\dim V=n$, $\dim W=m$.

Niech $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ i $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ będą uporządkowanymi bazami odpowiednio V i W .

Rozważmy przekształcenie liniowe $T: V \rightarrow W$.

Weźmy dowolny wektor $\mathbf{v} \in V$. Oczywiście

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j, \text{ więc } T(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n v_j T(\mathbf{e}_j).$$

Widać, że przekształcenie liniowe jest w pełni określone, jeśli znamy jego wartości na wektorach bazy przestrzeni $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ przestrzeni V .

Rozważmy j -ty wektor bazy, czyli $\mathbf{e}_j$ i jego obraz $T(\mathbf{e}_j) \in W$. Wobec tego

$$T(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{f}_i.$$

Współrzędne obrazu j -tego wektora bazowego będą tworzyć j -tą kolumnę macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

którą nazywamy reprezentacją macierzową przekształcenia T w zadanych bazach przestrzeni.

Dla dowolnego wektora $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$ o współrzędnych $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ otrzymujemy

$$T(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n v_j T(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) \mathbf{f}_i$$

Z drugiej strony

$$T(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{f}_i .$$

Widać więc, że współrzędne obrazu danego wektora wyznaczamy ze wzoru

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j , \quad i=1, \dots, m ,$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Uwaga. Przestrzeń $(V, K, +, \cdot)$ i wymiarze $\dim V = n$ jest **izomorficzna** z przestrzenią $(K^n, K, +, \cdot)$.

Naturalnym izomorfizmem jest przekształcenie, które danemu wektorowi przypisuje ciąg jego współrzędnych w danej bazie. Ciąg współrzędnych zestawiamy w postaci kolumny (macierzy o jednej kolumnie). Powyższa równość macierzowa pokazuje jak wyznaczyć współrzędne obrazu danego wektora przez przekształcenie liniowe. Oczywiście z uwagi na wzmiankowany wyżej izomorfizm, znajomość współrzędnych wektora w danej bazie jest równoważna znajomości tego wektora.

Motywacja definicji mnożenia macierzy

Rozważmy trzy przestrzenie V, W, U o wymiarach $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = k$ i przekształcenia liniowe

$T: V \rightarrow W$ o reprezentacji macierzowej $\mathbf{A}$

i

$S: W \rightarrow U$ o reprezentacji macierzowej $\mathbf{B}$

przy ustalonych bazach w poszczególnych przestrzeniach.

Reprezentacją macierzową złożenia $S \circ T$ jest iloczyn macierzy $\mathbf{BA}$.

Rzeczywiście zapisując związki między współrzędnymi mamy

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j , \quad i=1, \dots, m \quad ; \quad u_s = \sum_{i=1}^m b_{si} w_i , \quad s=1, \dots, k .$$

Stąd

$$u_s = \sum_{i=1}^m b_{si} w_i = \sum_{i=1}^m b_{si} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m b_{si} a_{ij} \right) v_j = \sum_{j=1}^n c_{sj} v_j ,$$

czyli

$$[c_{sj}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m b_{si} a_{ij} \end{bmatrix} . \text{ Inaczej } \quad \mathbf{C} = \mathbf{BA} .$$