

Wyznacznik macierzy

Uwaga. Pojęcie wyznacznika macierzy (lub przekształcenia liniowego reprezentowanego przez macierz) definiuje się **tylko dla macierzy kwadratowych**.

Niech $A = [a_1, \dots, a_n]$ będzie macierzą **kwadratową** o kolumnach $a_1, \dots, a_n$.

Def. (aksjomatyczna). Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_1, \dots, a_n]$ nazywamy funkcję

$$\det : A = [a_1, \dots, a_n] \rightarrow \det(A) \in K, \text{ (która danej macierzy kwadratowej przypisuje skalar)}$$

spełniającą warunki:

1. $\det$ jest liniową funkcją każdej kolumny przy ustalonych pozostałych tzn.
 $\det[a_1, \dots, \alpha a_k + \beta b_k, \dots, a_n] = \alpha \det[a_1, \dots, a_k, \dots, a_n] + \beta \det[a_1, \dots, b_k, \dots, a_n]$
2. $\det$ jest funkcją alternującą tzn.
 jeśli dla $a_i = a_j$ dla $i \neq j$, to $\det[a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n] = 0$
3. $\det(I) = \det[e_1, \dots, e_n] = 1$ e_i – i -ta kolumna macierzy jednostkowej.

Z powyższej aksjomatycznej definicji w wyznacznika wynika, że:

- a) Jeżeli macierz ma zerową kolumnę, to jej wyznacznik jest równy 0 (wniosek z 1 dla $\alpha=\beta=0$)
- b) Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeśli do danej kolumny dodamy liniową kombinację pozostałych kolumn (wniosek z 1 i 2)
- c) Wyznacznik zmienia znak, gdy zamienimy miejscami dowolne dwie kolumny
- d) Funkcja $\det$ jest jednoznacznie wyznaczona przez własności 1,2,3

Dow. c)

$$\begin{aligned} \det[a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n] &= \det[a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n] = \\ &= \det[a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j - (a_i + a_j), \dots, a_n] = \det[a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, -a_i, \dots, a_n] = \\ &= \det[a_1, \dots, a_j, \dots, -a_i, \dots, a_n] = -\det[a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n] \end{aligned}$$

Dow. d)

$$\begin{aligned} \det[a_1, a_2, \dots, a_n] &= \det \left[\sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^n a_{k_2 2} e_{k_2}, \dots, \sum_{k_n=1}^n a_{k_n n} e_{k_n} \right] = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} \det[e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}] = \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in P_n} (-1)^{\varepsilon(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} \end{aligned}$$

gdzie P_n oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ (jest ich $n!$), a

$\varepsilon(k_1, k_2, \dots, k_n)$ oznacza ilość inwersji permutacji $(k_1, k_2, \dots, k_n)$

Uwaga. Wzór $\det[a_1, a_2, \dots, a_n] = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in P_n} (-1)^{\varepsilon(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n}$ stanowi tzw. **permutacyjną**

definicję wyznacznika.

Wyjaśnienie

Def. Niech $a_1, \dots, a_n$ będzie skończonym ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Para (a_i, a_j) tworzy inwersję jeżeli $i < j$ i $a_i > a_j$

Przykład. Rozważmy ciąg (1,7,5,4). Ile jest inwersji w tym ciągu? Z danego ciągu można utworzyć 6 par bez zmiany porządku (C_4^2) : (1,7), (1,5), (1,4), (7,5), (7,4), (5,4). Trzy ostatnie tworzą inwersje.

Bezpośrednio z permutacyjnej definicji wyznacznika mamy

- $\det[a_{11}] = a_{11}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Reguła Sarrusa $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \\ + \\ - \end{array}$

Uwaga. Reguła Sarrusa stosuje się tylko do wyznaczników stopnia trzeciego

Uwaga. Jako oznaczenie wyznacznika $\det \mathbf{A}$ używa się również $|\mathbf{A}|$.

Z permutacyjnej definicji wyznacznika i własności permutacji otrzymujemy

Tw. Wyznacznik macierzy jest równy wyznacznikowi macierzy transponowanej: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

Def Minorem elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik M_{ij} utworzony a wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$ przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

$$M_{ij} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Def. Dopelnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Tw. Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika. Dla dowolnej macierzy kwadratowej prawdziwe są wzory

- $\det[a_{ij}] = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ dla dowolnego $i=1, \dots, n$ (rozwiniecie wzgledem i -tego wiersza)
- $\det[a_{ij}] = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$ dla dowolnego $j=1, \dots, n$ (rozwiniecie wzgledem j -tej kolumny)

Dowód. (rozwiniecie wzgledem j -tej kolumny)

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A} &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} a_{ij} \det \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} a_{ij} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}
 \end{aligned}$$

Przykład. Obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

- bezpośrednio z tw. o rozwijaniu
- wykorzystując własności wyznacznika doprowadzić go najpierw do wygodniejszej postaci.

Tw. Cauchyego. Dla dowolnych macierzy kwadratowych $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ tego samego stopnia prawdziwa jest równość $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

Dowód. Niech $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$. Stąd

$$\det C = \det \left[\sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} \mathbf{b}_{k_1}, \dots, \sum_{k_n=1}^n a_{k_n n} \mathbf{b}_{k_n} \right] = \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^n a_{k_1 1} \dots a_{k_n n} \det[\mathbf{b}_{k_1}, \dots, \mathbf{b}_{k_n}] =$$

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in P_n} a_{k_1 1} \dots a_{k_n n} (-1)^{\varepsilon(k_1, \dots, k_n)} \det[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n] = \det \mathbf{B} \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in P_n} a_{k_1 1} \dots a_{k_n n} (-1)^{\varepsilon(k_1, \dots, k_n)} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

Uwagi

- Dla macierzy blokowych prawdziwa jest równość $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right]$. Z twierdzenia

Cauchy'ego $\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right] = \det \mathbf{A} \det \mathbf{C}$

- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} = a_{11} \dots a_{pp}$

Def. Macierz kwadratową nazywamy nieosobliwą jeżeli jej wyznacznik jest różny od 0.

Def Dla macierzy nieosobliwej $\mathbf{A}$ definiuje się macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ czyli macierz spełniającą warunek $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$

Def. Macierzą dołączoną $\mathbf{A}^D$ macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy transponowaną macierz jej dopełnień algebraicznych

Tw. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^D$. Dowód poprzedzimy przykładami.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy odwrotnej

1. Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie. Zbiór macierzy kwadratowych, nieosobliwych tego samego stopnia tworzy grupę z działaniem mnożenia macierzy. Elementem neutralnym jest macierz jednostkowa $\mathbf{E}$, natomiast elementem odwrotnym do macierzy (nieosobliwej) $\mathbf{A}$ jest macierz $\mathbf{A}^{-1}$.

2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Dowód. $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{E} \quad / \quad \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

3. Jeżeli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami nieosobliwymi tego samego stopnia, to $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

Dowód. $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$

$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}$

Dowód tw. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{A}^D$

$$\mathbf{AA}^D = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1j} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{nk} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

Stąd $\mathbf{AA}^D = \det(\mathbf{A})\mathbf{E}$. Wobec tego $\mathbf{A}(\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{A}^D) = \mathbf{E}$.

Wyjaśnienie. Aby otrzymać element iloczynu $\mathbf{AA}^D$ stojący w i -tym wierszu i w i -tej kolumnie mnożymy i -ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$ przez i -tą kolumnę macierzy $\mathbf{A}^D$ i otrzymujemy

$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \det(\mathbf{A})$ (z tw. Laplace'a o rozwijaniu). Natomiast element iloczynu stojący w i -tym

wierszu i w j -tej kolumnie otrzymujemy mnożąc i -ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$ przez j -tą kolumnę macierzy

macierzy $\mathbf{A}^D$ i dostajemy $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$, gdyż otrzymana suma jest rozwinięciem wyznacznika

macierzy $\mathbf{A}$ w której j -ty wiersz został zastąpiony i -tym wierszem (wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych wierszach jest równy 0).