

Równania liniowe

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K , a $T: V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Rozważmy równanie liniowe

$$T(\mathbf{v})=\mathbf{w}.$$

Powyższe równanie nazywamy **równaniem liniowym niejednorodnym**, a w przypadku, gdy $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ równanie

$$T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$$

nazywamy **równaniem liniowym jednorodnym**.

Równanie liniowe jednorodne ma zawsze rozwiązanie. Każdy wektor $\mathbf{v}_{Ker} \in Ker\ T$ jest oczywiście rozwiązaniem równania jednorodnego, (czyli $T(\mathbf{v}_{Ker})=\mathbf{0}$). Jądro jest (niepustą) podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą przynajmniej wektor zerowy $\mathbf{0}$ przestrzeni V .

Oczywiste jest, że równanie niejednorodne $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{w} \in Im\ T$. Ponadto, jeżeli $\mathbf{v}_s$ jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego, czyli $T(\mathbf{v}_s)=\mathbf{w}$, to również $\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{Ker}$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego, czyli $T(\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{Ker}) = T(\mathbf{v}_s) + T(\mathbf{v}_{Ker}) = \mathbf{w}$. Z drugiej strony dwa różne rozwiązania $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ równania jednorodnego różnią się od siebie o element z jądra $Ker\ T$. Rzeczywiście, gdy $T(\mathbf{v}_1)=\mathbf{w}$ i $T(\mathbf{v}_2)=\mathbf{w}$, to $T(\mathbf{v}_1)-T(\mathbf{v}_2)=\mathbf{w}-\mathbf{w}=\mathbf{0}$, stąd $T(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\mathbf{0}$, więc $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2 \in Ker\ T$. Wobec tego $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_{Ker}$.

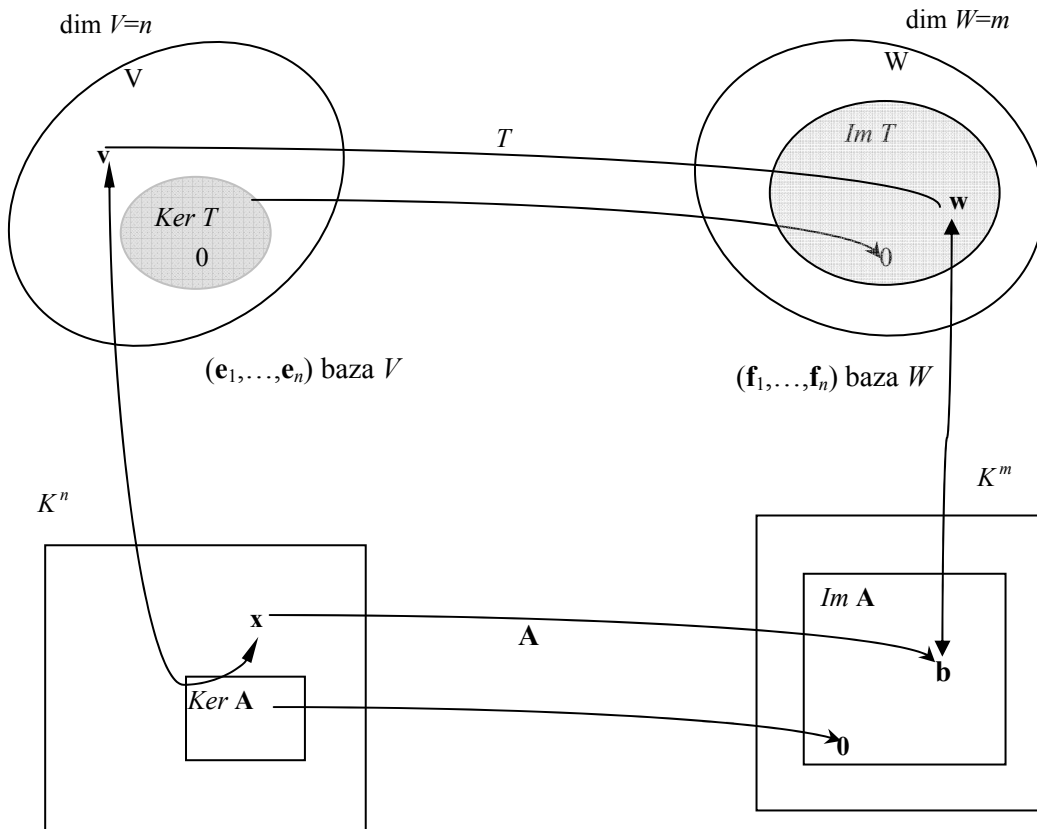
Powyższe rozważania podsumujemy w formie twierdzenia

Tw. Równanie liniowe $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{w} \in Im\ T$. Każde rozwiązanie jest postaci $\mathbf{v}=\mathbf{v}_s+\mathbf{v}_{Ker}$, gdzie $\mathbf{v}_{Ker} \in Ker\ T$. Jeżeli jądro jest podprzestrzenią o skończonym wymiarze z bazą $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$, to rozwiązanie równania $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{v}=\mathbf{v}_s+\alpha_1\mathbf{e}_1+\dots+\alpha_k\mathbf{e}_k$, gdzie $\mathbf{v}_s$ jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego, a stałe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są dowolne.

W przypadku, gdy przestrzenie V i W są skończone wymiarowe przekształcenie liniowe T ma przy zadanych bazach reprezentację macierzową $\mathbf{A}$. Korzystając z izomorfizmu przestrzeni V wymiaru n i przestrzeni współrzędnych K^n , (której elementami są ciągi n elementowe zapisywane jako macierze kolumnowe) oraz przestrzeni W wymiaru m i przestrzeni współrzędnych K^m możemy problem rozwiązania równania liniowego $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ sprowadzić do problemu rozwiązania układu równań

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},$$

$$\text{gdzie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$



Układ równań liniowych $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, można zapisać w postaci rozwiniętej

[illegible]

Macierz $\mathbf{A}$ nazywamy macierzą współczynników, macierz kolumnową $\mathbf{x}$ nazywamy wektorem niewiadomych, a macierz kolumnową $\mathbf{b}$ kolumną wyrazów wolnych natomiast macierz

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą uzupełnioną**.

Możemy więc jeszcze raz wypowiedzieć podstawowe twierdzenie dotyczące układów równań.

Tw. Równanie liniowe $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{b}\in Im A$. Każde rozwiązanie jest postaci $\mathbf{x}=\mathbf{x}_s+\mathbf{x}_{Ker}$, gdzie $\mathbf{x}_{Ker}\in Ker A$. Jeżeli jądro jest podprzestrzenią o skończonym wymiarze z bazą $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, to rozwiązanie układu $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_s + \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{X}_k,$$

gdzie $\mathbf{x}_s$ jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego, a stałe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są dowolne.

Oznaczając przez

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j\text{-tą kolumnę macierzy } \mathbf{A} ; j=1, \dots, n$$

układ równań $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ można zapisać w postaci

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}$$

Ponieważ $\text{Im } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ więc $\mathbf{b} \in \text{Im } \mathbf{A} \Leftrightarrow \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$.

Ponieważ $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$, więc warunek $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ jest równoważny warunkowi

$$\dim \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \dim \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\},$$

który oznacza, że liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy $\mathbf{A}$ jest równa liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy uzupełnionej $\mathbf{A}_u$.

Kluczowym jest podanie sposobu sprawdzania powyższego warunku.

Def. Rzędem macierzy nazywamy liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy, czyli

$$\text{rz } \mathbf{A} = \dim \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}.$$

Def. Wyznacznikiem stopnia l macierzy prostokątnej nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia l powstałej z macierzy $\mathbf{A}$ przez skreślenie odpowiedniej liczby kolumn i wierszy.

Def. Minorem bazowym macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy niezerowy wyznacznik najwyższego stopnia, który można uzyskać z macierzy $\mathbf{A}$.

Lemat o minorze bazowym. Rząd macierzy jest równy stopniowi jej minora bazowego.

Niech r będzie stopniem minora bazowego macierzy $\mathbf{A}$. Bez straty ogólności założmy, że minor bazowy zajmuje lewy górny róg macierzy.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rk1} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

Pokażemy, że wszystkie kolumny macierzy $\mathbf{A}$ można wyrazić jako liniowe kombinacje pierwszych r kolumn macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadających kolumnom minora bazowego.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Ustalmy dowolne $k > r$ i rozważmy dowolny wiersz powiedzmy i -ty ($i > r$).

Ponieważ każdy minor stopnia $r+1$ (o ile istnieje) jest równy 0, to rozwijając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}$$

względem ostatniego wiersza mamy

$$a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ir}A_{ir} + a_{ik}A_{ik} = 0.$$

Oznaczając dopełnienia algebraiczne ostatniego wiersza A_{ij} przez $A_j, j=1, \dots, r+1$, które nie zależą od wyboru numeru (ostatniego dodatkowego) wiersza i , oraz zauważając, że

$$D = A_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\text{Mamy } a_{ik} = \left(-\frac{A_1}{D}\right)a_{i1} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{D}\right)a_{ir},$$

gdzie k jest ustalone a i przebiega wszystkie wartości od $r+1$ do m . Zauważmy, że powyższa równość jest też prawdziwa dla $i=1, \dots, r$. Wówczas ostatni $r+1$ -wszy wiersz jest identyczny z i -tym wierszem.

$$\text{Ostatecznie więc } \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = \left(-\frac{A_1}{D}\right) \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{D}\right) \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix},$$

czyli k -ta kolumna jest kombinacją liniową r pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{A}$.

- Wszystkie operacje nie zmieniające wyznacznika nie zmieniają także rzędu macierzy, w szczególności rząd macierzy nie zmieni się, jeśli do danego wiersza dodamy liniową kombinację pozostałych wierszy.
- Rząd nie zmieni się, gdy wykreślimy zerowy wiersz lub zerową kolumnę a także, gdy przestawimy dwa wiersze lub dwie kolumny.
- $\text{rz } \mathbf{A} = \text{rz } \mathbf{A}^T$

Korzystając z udowodnionego wcześniej twierdzenia $\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$, które w tym

przypadku można zapisać równoważnie $\dim \text{Ker } \mathbf{A} = n - r$, gdzie $r = \text{rz } \mathbf{A}$ dostajemy

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego. Układ równań liniowych $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rz}\mathbf{A}=\text{rz}\mathbf{A}_u$.

- Jeżeli $\text{rz}\mathbf{A}=\text{rz}\mathbf{A}_u=n$ (n -ilość niewiadomych) , to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie
- Jeżeli $\text{rz}\mathbf{A}=\text{rz}\mathbf{A}_u=k<n$ (n -ilość niewiadomych) , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-k$ parametrów

Jeżeli $m=n$ i $\det \mathbf{A} \neq 0$, to układ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ nazywamy układem Cramera .Wówczas

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Ponadto prawdziwe są wzory Cramera $x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$, gdzie $\mathbf{A}_i$ jest macierzą $\mathbf{A}$ w której i -tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych (wektorem) $\mathbf{b}$.

Rzeczywiście zapisując układ Cramera w postaci $\mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$ i obliczając $\det \mathbf{A}_i$ mamy

$$\det \mathbf{A}_i = \sum_{j=1}^n x_j \det[\mathbf{a}_1, \dots, \underset{i\text{-te miejsce}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_n] = x_i \det \mathbf{A} .$$

Wniosek .Układ jednorodny $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ ma zawsze rozwiązanie. Jeżeli $\text{rz}\mathbf{A}=n$, to jedynym rozwiązaniem jest $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Przykład. Metoda eliminacji Gaussa

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 9x_4 = -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & -9 & -6 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -8 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -12 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{rz}\mathbf{A}=\text{rz}\mathbf{A}_u=3<4 \quad \text{Przyjmując } x_4=t \text{ otrzymujemy}$$

$$\text{rozwiązanie postaci } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań}$$

zależnych od 1 parametru.

Uwagi o odwracaniu macierzy metodą eliminacji –jednoczesne rozwiązywanie wielu układów równań z tą samą macierzą współczynników $\mathbf{A}$.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{E}] \xrightarrow{\text{operacje elementarne na wierszach}} [\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}] \quad (\text{uzasadnienie algorytmu}).$$