

Przestrzenią R^3 nazywamy zbiór uporządkowanych trójek (x,y,z) liczb rzeczywistych

$$R^3 = \{(x,y,z): x,y,z \in R\}$$

Uwaga. Przestrzeń R^3 będziemy interpretować na **3 sposoby**

- **zbiór punktów** $P=(x,y,z)$ w przestrzeni wyposażonej w kartezjański układ współrzędnych
- **zbiór wszystkich wektorów zaczepionych** postaci $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ - wektory te mają wspólny początek $O=(0,0,0)$, a końce w punktach $P=(x,y,z)$. Wektor $\overrightarrow{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu P , który zwykle oznaczamy przez $\mathbf{r}$ lub $\vec{r}$. Liczby x,y,z nazywamy współrzędnymi wektora $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- **zbiór wszystkich wektorów swobodnych** w przestrzeni. Przez wektor swobodny rozumiemy tu zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość, co dany wektor $\mathbf{u}$. Dany wektor $\mathbf{u}$ nazywamy reprezentantem wektora swobodnego oznaczanego również przez $\mathbf{u}$. Wektor swobodny jest w tym ujęciu klasą równoważności relacji równoważnościowej zadanej w zbiorze wszystkich wektorów zaczepionych-

$$\mathbf{u} \mathcal{R} \mathbf{w} \Leftrightarrow \text{istnieje translacja wektora } \mathbf{u} \text{ na wektor } \mathbf{w}.$$

W tej interpretacji elementy przestrzeni R^3 nazywamy wektorami. Każdemu wektorowi swobodnemu odpowiada trójka liczb niezależna od wyboru reprezentanta

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z] = [u_1, u_2, u_3].$$

Działania na wektorach (swobodnych)

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z], \quad \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]$$

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = [u_x \pm v_x, u_y \pm v_y, u_z \pm v_z], \quad \lambda \mathbf{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$$

Uwaga. Zbiór wektorów swobodnych z działaniami dodawania wektorów swobodnych i mnożenia wektora przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

Inne (formalne) ujęcie

Niech X będzie pewnym zbiorem (zwanym zbiorem punktów) a V przestrzenią wektorową. Niech będzie dane działanie zewnętrzne w zbiorze X nad zbiorem V (dodawanie wektora do punktu)

$$V \times X \ni (x, \mathbf{v}) \rightarrow x + \mathbf{v} \in X,$$

spełniające warunki:

1. $\forall x \in X \quad x + \mathbf{0} = x$
2. $\forall x, y \in X \quad \exists \mathbf{v} \in V \quad x + \mathbf{v} = y$
3. $x + \mathbf{v} = x + \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}$
4. $\forall x \in X \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad x + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$

Trojkę $(X, V, +)$ nazywamy **przestrzenią afiniczną**. Przestrzeń wektorową V nazywamy przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni afinicznej X . Elementy przestrzeni afinicznej nazywamy punktami.

Dalej nie będziemy rozwijać formalnego podejścia poprzestając na podanych wcześniej intuicyjnych interpretacjach punktów i wektorów w R^3 .

Przestrzenią R^n nazywamy zbiór ciągów n elementowych $x=(x_1, \dots, x_n)$ liczb rzeczywistych.

Podobnie jak w przypadku przestrzeni R^3 elementy przestrzeni R^n możemy interpretować jako punkty, wektory zaczepione lub wektory swobodne.

Odległość punktów i długość wektora w przestrzeni R^3 .

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2); d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Uogólnienie

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K (R lub C).

Def. Normą w przestrzeni liniowej nad ciałem K nazywamy funkcję $\|\cdot\|: V \ni v \rightarrow \|v\| \in R_+$, przy czym:

1. $\forall v \in V \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\forall \alpha \in K \quad \forall v \in V \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
3. $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (subaddytywność normy)

Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Norma wektora jest uogólnieniem pojęcia długości wektora wprowadzonej w przestrzeni R^3 .

Przykłady

- $X = R^n \quad x = (x_1, \dots, x_n)$
 - $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ - norma euklidesowa (norma l_2)
 - $\|x\|_{l_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ - norma max lub l_∞
 - $\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$ - norma l_1
- $X = C_{[a,b]}$ - zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych **ciągłych** na $[a, b]$

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$
 - norma supremum (sup=max bo f jest ciągła na zbiorze zwartym)

Iloczynem skalarnym wektorów a i b w przestrzeni R^3 nazywamy liczbę

$$a \circ b = |a| |b| \cos \varphi,$$

gdzie φ jest kątem (zwykłym) pomiędzy wektorami a i b .

Fakt. Jeżeli $a = [a_x, a_y, a_z]$, $b = [b_x, b_y, b_z]$, to $a \circ b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Wniosek. $\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Własności iloczynu skalarnego (w przestrzeni $\mathbb{R}^3$)

- $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ -przemienność
- $(\lambda \mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$ - rozdzielnosc iloczynu skalarnego wzgledem dodawania
- $|\mathbf{a} \circ \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$

Uogólnienie. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K ($\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$).

Def. **Iloczynem skalarnym** w przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$, przy czym:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\forall \alpha \in K \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad \langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
4. $\forall \mathbf{v} \in V \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad \text{ i } \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Parę $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazywamy **przestrzenią unitarną**.

Przykłady

- $X = \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n); \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- $X = \mathbb{C}^n \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n); \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$
- $X = C_{[a,b]}$ -przestrzeń funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[a,b]$; $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
- $X = W_{[n],[a,b]}$ -przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$ na przedziale $[a,b]$; $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

W przestrzeni unitarnej prawdziwa jest następująca **nierówność Schwarza**

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Dowód nierówności Schwarza.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \forall \lambda \in K \quad ; \quad 0 \leq \|\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + |\lambda|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Przyjmijmy w szczególności $\lambda = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Biorąc pod uwagę, tożsamości $z \bar{z} = |z|^2$ i $\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

otrzymujemy nierówność $0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ z której wynika teza.

Mając dany iloczyn skalarny w przestrzeni V możemy określić w niej normę za pomocą wzoru

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Dowód subaddytywności normy $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ wyznaczonej przez iloczyn skalarny.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \stackrel{(1)}{\leq} \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \stackrel{(2)}{\leq} \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

W dowodzie wykorzystano (1) $\operatorname{re} z \leq |z|$ (2) nierówność Schwarz'a

W przestrzeni unitarnej możemy określić kąt (cosinus kąta) między niezerowymi wektorami wzorem

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad (\text{z nierówności Schwarz'a } |\cos \varphi| \leq 1).$$

Def. Wektory $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ przestrzeni unitarnej V nazywamy **ortogonalnymi** (prostopadłymi), gdy $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Niech V będzie n wymiarową przestrzenią unitarną z bazą $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Za pomocą następującej procedury **ortonormalizacji Grama-Schmidta** :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1\|}, \dots, \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i\|},$$

można zbudować bazę ortonormalną $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ w przestrzeni V .

Zadanie. Stosując procedurę ortonormalizacji Grama-Schmidta w przestrzeni $\mathcal{W}_{[3]}$ wielomianów stopnia ≤ 3 określonych na przedziale $[-1, 1]$ z bazą jednomianów $1, t, t^2, t^3$ znaleźć bazę ortonormalną.

Odp. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3} + t^2\right), \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(-\frac{3}{5}t + t^3\right)$ są to unormowane wielomiany Legendre'a.

Wyznacznik Grama

Niech $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ będzie ciągiem wektorów w przestrzeni unitarnej. Wyznacznikiem Grama nazywamy wyznacznik

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Tw. Wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Dowód. Wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$.

Mnożąc tożsamość $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ skalarnie (z lewej strony) przez $\mathbf{v}_j, j=1, \dots, n$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ który ma rozwiązanie zerowe } \Leftrightarrow G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0.$$