

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ **iloczynem wektorowym** uporządkowanej pary niezerowych i nierównoległych wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ nazywamy wektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ spełniający warunki

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jest prostopadły do $\mathbf{u}$ i do $\mathbf{v}$
2. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \varphi$, czyli jego długość jest równa polu równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$
3. zwrot $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ określa reguła śruby prawoskrętnej – inaczej, orientacja trójki wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych tzn. wyznacznik którego kolejnymi wierszami są $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jest dodatni.

Fakt. Jeżeli $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Własności

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ rozdzielność $\times$ względem dodawania
- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$
- $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, to liczba $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

Fakt. Jeżeli $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$, $\mathbf{c} = [c_x, c_y, c_z]$ to $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Fakt $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = \text{objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ i } \mathbf{c}$.

Zastosowania

- Pole równoległoboku i trójkąta . Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $P=(1,-1,0)$, $Q=(2,3,-1)$, $R=(-1,0,1)$. Pole $= \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{107}$
- Objętość równoległościanu i czworościanu. Dany jest czworościan o wierzchołkach P, Q, R, S . Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach P, Q, R, S . $V = \frac{1}{6} |(\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS})|$
(bo objętość czworościanu $= \frac{1}{3}$ objętość równoległościanu o tej samej podstawie)

Płaszczyzna w przestrzeni

Równanie ogólne płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$,

Płaszczyzna π jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ należący do płaszczyzny i o wektor normalny $\mathbf{n} = (A, B, C)$ (prostopadły do) płaszczyzny π

$$\text{Punkt } P=(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

Stąd $Ax+By+Cz+(-Ax_0+By_0+Cz_0)=0$. Przyjmując $D=(-Ax_0+By_0+Cz_0)$ otrzymujemy równanie ogólne płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$.

Równanie parametryczne płaszczyzny

Płaszczyzna π jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ należący do płaszczyzny i dwa liniowo niezależne wektory $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$, leżące na płaszczyźnie π ;

$$\text{Punkt } P=(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \exists t,s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \end{cases}$$

Równanie parametryczne prostej

Prosta l jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ należący do prostej l i wektor kierunkowy $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]$ (równoległy do) prostej l

$$\text{Punkt } P=(x,y,z) \in l \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Równanie krawędziowe prostej (część wspólna dwóch płaszczyzn nierównoległych)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Odległość punktu $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ **od płaszczyzny** $Ax+By+Cz+D=0$.

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość punktu $P=(x,y,z)$ **od prostej** $l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Wzajemne położenie

- płaszczyzn - płaszczyzny mogą być równoległe, identyczne lub mogą przecinać się wzdłuż krawędzi (prostej) l

- odległość płaszczyzn równoległych, $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- kąt pod jakim przecinają się płaszczyzny
- prostej i płaszczyzny (kąt między prostą i płaszczyzną)
- dwóch prostych (odległość prostych skośnych) $l_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ i $l_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{b}$

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$