

Zmiana bazy i macierz przejścia

Niech V będzie n wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $B=(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ będzie bazą przestrzeni V . Rozważmy nową bazę $B'=(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$. Oczywiście każdy wektor nowej bazy da się jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów starej bazy $B=(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$; dokładnie

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{e}_i,$$

czyli współrzędne j -tego wektora nowej bazy względem starej bazy $B=(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ tworzą j -tą kolumnę macierzy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

zwanej **macierzą przejścia od bazy starej do nowej**

Zauważmy, że dowolny wektor $\mathbf{v} \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$.

Z drugiej strony $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) \mathbf{e}_i$.

Z jednoznaczności przedstawienia wektora w postaci liniowej kombinacji wektorów starej bazy mamy związek pomiędzy nowymi i starymi współrzędnymi danego wektora $\mathbf{v} \in V$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix},$$

który skrótowo zapisujemy $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$.

Uwaga. Z konstrukcji widać, że macierz przejścia jest macierzą przekształcenia identycznościowego przestrzeni V na siebie w bazach B' , B .

Jak zmienia się reprezentacja macierzowa przekształcenia liniowego przy zmianie bazy

Niech V i W będą przestrzeniami skończone wymiarowymi nad tym samym ciałem K i $\dim V=n$, $\dim W=m$. Niech $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ i $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ będą uporządkowanymi bazami odpowiednio V i W .

Rozważmy przekształcenie liniowe $T: V \rightarrow W$ reprezentowane przez macierz $\mathbf{A}_{(m,n)}$.

Wiadomo, że przestrzeń V jest izomorficzna z przestrzenią K^n , a przestrzeń W jest izomorficzna z przestrzenią K^m . Naturalny izomorfizm przypisuje wektorowi ciąg jego współrzędnych w danej bazie. Wobec tego wektorowi $v \in V$ odpowiada ciąg współrzędnych który zapiszemy w postaci kolumny

$$v \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \text{ Podobnie wektorowi } w \in W \text{ odpowiada ciąg współrzędnych } w \leftrightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Niech $w=T(v)$, wówczas wykorzystując reprezentację macierzową przekształcenia T możemy napisać zależność pomiędzy współrzędnymi

$$y=Ax.$$

Jeśli w przestrzeni V zmienimy starą bazę $B=(e_1, \dots, e_n)$ na nową $B'=(e'_1, \dots, e'_n)$, to wektorowi v odpowiada teraz nowy ciąg współrzędnych x' , który jest związany z ciągiem starych współrzędnych zależnością

$$x = Px',$$

gdzie P jest macierzą przejścia od bazy starej do nowej. Podobnie zmieniając bazę starą $(f_1, \dots, f_m)$ przestrzeni W na nową $(f'_1, \dots, f'_m)$ mamy macierz przejścia Q i związek pomiędzy nowymi i starymi współrzędnymi wektora w

$$y = Qy'.$$

Wobec tego mamy związek $Qy' = APx'$, który jest równoważny zależności

$$y' = Q^{-1}APx',$$

Z której widać, że reprezentacją macierzową przekształcenia T w nowych bazach jest macierz

$$Q^{-1}AP.$$

Def. Macierze A i B typu (m,n) reprezentujące to samo przekształcenie liniowe nazywamy **macierzami równoważnymi**.

W świetle powyższych rozważań macierze A i B typu (m,n) są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją nieosobliwe macierze P typu (n,n) i Q typu (m,m) takie, że $B = Q^{-1}AP$.

W szczególności rozważmy **endomorfizm** $T: V \rightarrow V$ reprezentowany w bazie $B=(e_1, \dots, e_n)$ przez macierz A . Zmieniając starą bazę $B=(e_1, \dots, e_n)$ na nową $B'=(e'_1, \dots, e'_n)$, endomorfizm T będzie reprezentowany przez macierz $P^{-1}AP$.

Def. Dwie macierze kwadratowe A i B typu (n,n) reprezentujące ten sam endomorfizm nazywamy **macierzami podobnymi**.

Macierze kwadratowe A i B typu (n,n) są **podobne** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją nieosobliwa macierze P typu (n,n) taka, że $B = P^{-1}AP$.

Problem. Jak zmienić bazę w przestrzeni V aby endomorfizm $T: V \rightarrow V$ miał możliwie prostą reprezentację macierzową np. macierz diagonalną?

Aby odpowiedzieć na to pytanie rozważymy problem **wartości własnych i wektorów własnych** endomorfizmu lub jego reprezentacji macierzowej.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K a $T: V \rightarrow V$ endomorfizmem w V . Przestrzeń V nie musi być skończenie wymiarowa.

Def. Skalar $\lambda \in K$ nazywamy wartością własną endomorfizmu $T: V \rightarrow V$, jeżeli istnieje **niezerowy** wektor $\mathbf{v} \in V$ taki, że $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Wektor $\mathbf{v} \in V$ nazywamy **wektorem własnym** endomorfizmu odpowiadającym wartości własnej λ .

Interpretacja: $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ oznacza, że wektory $\mathbf{v}$ i $T(\mathbf{v})$ są liniowo zależne. Przekształcenie T działa na wektor własny w ten sposób, że mnoży go przez wartość własną λ .

Uwaga. Warunek $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ jest równoważny warunkowi $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T - id_V)$, gdzie id_V oznacza endomorfizm identycznościowy przestrzeni V . Ponieważ jądro $\text{Ker}(T - id_V)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V zbiór

$$V_\lambda = \{ \mathbf{v}: T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \} = \text{Ker}(T - id_V)$$

wektorów własnych uzupełnionych wektorem zerowym jest podprzestrzenią przestrzeni V zwaną podprzestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej λ . Liczba liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ jest równa oczywiście wymiarowi podprzestrzeni V_λ .

Niech V będzie przestrzenią n -wymiarową nad K z bazą $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. V jest izomorficzna z przestrzenią K^n , a endomorfizm $T: V \rightarrow V$ jest reprezentowany przez macierz $\mathbf{A}$. Wektorowi $\mathbf{v} \in V$ odpowiada wektor współrzędnych $\mathbf{x} \in K^n$.

Def. Skalar $\lambda \in K$ nazywamy wartością własną macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$, jeżeli istnieje **niezerowy** wektor $\mathbf{x} \in K^n$ taki, że $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$. Wektor $\mathbf{x} \in K^n$ nazywamy **wektorem własnym** macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej λ .

Tw. Skalar $\lambda \in K$ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

Dowód. $\lambda \in K$ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

Def. Równanie $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym** macierzy $\mathbf{A}$, natomiast wielomian $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy $\mathbf{A}$.

Wnioski

- wielomian charakterystyczny $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ jest wielomianem stopnia n , dokładniej

$$W(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Uwaga: $a_0 = W(0) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$, $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$ (śląd macierzy)

- $\lambda \in K$ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A} \Leftrightarrow \lambda \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego

Jeśli zmienimy bazę w przestrzeni V to endomorfizm jest reprezentowany przez macierz podobną $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, wówczas $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}) = \det(\mathbf{P}^{-1}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{P}) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Otrzymaliśmy więc

Tw. Wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V .

Możemy więc mówić o wielomianie charakterystycznym endomorfizmu $T: V \rightarrow V$.

Problem istnienia wartości własnych endomorfizmu lub macierzy reprezentującej ten endomorfizm sprowadza się do wyznaczenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego lub do rozwiązania równania charakterystycznego.

Uwaga. Jeśli rozpatrujemy problem wartości własnych endomorfizmu $T: V \rightarrow V$ przestrzeni V nad $K=\mathbb{R}$, to wartości własne mogą nie istnieć, gdyż wielomian charakterystyczny może nie mieć pierwiastków rzeczywistych. W przypadku $K=\mathbb{C}$ z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że wielomian charakterystyczny ma dokładnie n pierwiastków (niekoniecznie różnych), czyli istnieje przynajmniej jedna wartość własna. Możemy więc napisać

$$W(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{n_i}, \text{ gdzie}$$

λ_i są różnymi (być może zespolonymi) wartościami własnymi o krotnościach n_i . Oczywiście

$$\sum_{i=1}^k n_i = n. \text{ Stąd łatwo widać, że } W(0) = \det(-\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^k (-\lambda_i)^{n_i}, \text{ czyli } \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{n_i}$$

Wyznacznik macierzy endomorfizmu jest więc równy iloczynowi wszystkich wartości własnych (licząc z krotnościami).

Wniosek: Macierz nieosobliwa ma niezerowe wartości własne.

Przykład. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

Równanie charakterystyczne: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$. Widać że $\lambda_1 = 1$ jest jednokrotną wartością własną a $\lambda_2 = -2$ jest dwukrotną wartością własną.

Wielomian charakterystyczny: $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$

$$\text{Rozwiązując układ } (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} - \{0\},$$

stąd $V_{\lambda=1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ jest podprzestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 1$.

$$\text{Podobnie } (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad t^2 + s^2 > 0, \text{ więc}$$

$$V_{\lambda=-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$