

Przykład 1. Rzeczywista macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ma wielomian charakterystyczny

$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2 + 1$, który nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc nie ma rzeczywistych wartości własnych, a więc także nie ma wektorów własnych o rzeczywistych współrzędnych.

Natomiast traktując liczby rzeczywiste jako szczególne liczby zespolone wielomian charakterystyczny ma dwa pierwiastki zespolone (sprzężone) $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$.

Odpowiadają im wektory własne $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} t$, $t \in \mathbb{C} - \{0 + 0i\}$ i $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} s$, $s \in \mathbb{C} - \{0 + 0i\}$.

Przykład 2. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -6 & 7 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -4 & -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

Równanie charakterystyczne: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$. Widać że $\lambda_1 = 1$ jest dwukrotną wartością własną a $\lambda_2 = 4$ jest jednokrotną wartością własną.

Wielomian charakterystyczny: $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$

Rozwiązując układ

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ stąd}$$

$V_{\lambda=1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ jest jednowymiarową podprzestrzenią własną odpowiadającą dwukrotnej wartości

własnej $\lambda = 1$.

$$\text{Podobnie } (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -7 & -6 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \neq 0, \text{ więc}$$

$V_{\lambda=4} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Kilka faktów dotyczących wartości i wektorów własnych

Fakt 1. Jeżeli λ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}$, to λ^k jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}^k$. Oprócz tego macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^k$ mają takie same wektory własne odpowiadające odpowiednio wartościom własnym λ i λ^k .

Rzeczywiście, jeżeli λ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}$, to $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$. Mnożąc ostatnie równanie z lewej strony przez $\mathbf{A}$ otrzymujemy $\mathbf{A}^2\mathbf{x}=\lambda\mathbf{Ax}=\lambda^2\mathbf{x}$.

Fakt 2. Jeżeli λ jest wartością własną nieosobliwej macierzy $\mathbf{A}$, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}^{-1}$. Oprócz tego macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^{-1}$ mają takie same wektory własne odpowiadające odpowiednio wartościom własnym λ i λ^{-1} .

Rzeczywiście, jeżeli λ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}$, to $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$. Mnożąc ostatnie równanie z lewej strony przez $\mathbf{A}^{-1}$ otrzymujemy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$. Ponieważ macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, więc $\lambda\neq 0$. Dzieląc ostatnią tożsamość przez $\lambda\neq 0$ otrzymujemy $\lambda^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, co kończy dowód faktu 2.

Fakt 3. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Dowód. (indukcyjny). $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

1. $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1$ liniowo niezależny.
2. Z: $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są liniowo niezależne
- T: $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ są liniowo niezależne

Dowód kroku indukcyjnego: Niech $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$. Wówczas

$\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$. Stąd $\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$, ale

$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$, więc mnożąc ostatnią równość stronami przez λ_{k+1} i

odejmując stronami dwie ostatnie tożsamości otrzymujemy

równość $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Z liniowej niezależności $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$

mamy $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Stąd $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, a z równości

$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$ otrzymujemy, że $\alpha_{k+1} = 0$, czyli $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ są liniowo niezależne.

Fakt 4. Wielomian charakterystyczny

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = \\ &= \lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \\ &= \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i\end{aligned}$$

Stąd $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$

Def. Endomorfizm $T: V \rightarrow V$ nazywamy **diagonalizowalnym**, jeśli istnieje baza przestrzeni V w której macierz tego endomorfizmu jest diagonalna,

Tw. Endomorfizm $T: V \rightarrow V$ jest **diagonalizowalny** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu T .

Dowód. $(\Rightarrow)$ $T: V \rightarrow V$ jest **diagonalizowalny** $\Rightarrow$ istnieje baza $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ przestrzeni V w której macierz tego endomorfizmu jest postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Stąd $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i, i=1, \dots, n$, czyli liniowo niezależne wektory $\mathbf{v}_i, i=1, \dots, n$ są wektorami własnymi endomorfizmu T .

$(\Leftarrow)$ Jeżeli istnieje baza złożona z liniowo niezależnych wektorów własnych $\mathbf{v}_i, i=1, \dots, n$, to $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i, i=1, \dots, n$, to macierz endomorfizmu T w tej bazie ma postać $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Wniosek . Jeżeli $\dim V = n$ i endomorfizm $T: V \rightarrow V$ ma n różnych wartości własnych to jest diagonalizowalny

Rozważając ponownie przykład z poprzedniego wykładu

$$\text{macierz } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ma wielomian charakterystyczny postaci $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$ i

$V_{\lambda=1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ oraz $V_{\lambda=-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Zestawiając otrzymane 3 liniowo niezależne

wektory własne w macierz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ otrzymujemy macierz przejścia od bazy starej do nowej

złożonej z wektorów własnych, która pozwala wyznaczyć (diagonalną) macierz endomorfizmu T w nowej bazie

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Natomiast macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ z przykładu 2 ma tylko 2 liniowo niezależne wektory

własne, więc endomorfizm reprezentowany przez tę macierz nie jest diagonalizowalny.

Jaką prostą postać może mieć macierz tego endomorfizmu w tym przypadku?

Niech V będzie przestrzenią nad ciałem $K=\mathbb{C}$, $\dim V=n$ a $T: V \rightarrow V$ endomorfizmem. Endomorfizm ma przynajmniej jeden wektor własny odpowiadający wartości własnej λ .

Def. Wektorem **głównym rzędu 1** odpowiadającym wartości własnej λ nazywamy wektor własny odpowiadający λ . Oznaczmy go $\mathbf{v}^{(1)}$. Wektorem **głównym rzędu k** nazywamy niezerowy wektor $\mathbf{v}^{(k)}$, taki, że $(T - \lambda \text{id}_V) \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k-1)}$ dla pewnego wektora głównego rzędu $k-1$. Wybierając bazę przestrzeni V otrzymujemy reprezentację macierzową $\mathbf{A}$ endomorfizmu T i możemy mówić o wektorach głównych rzędu k macierzy $\mathbf{A}$ (czyli endomorfizmu $\mathbf{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) określonych wzorem $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)}$.

Kontynuacja przykładu 2. Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ otrzymaliśmy wielomian

charakterystyczny $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$ i tylko dwa liniowo niezależne wektory własne

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=4$.

Wyznamy (o ile istnieje) wektor główny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1=1$.

Rozwiązujemy układ równań

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x}_1^{(2)} = \mathbf{x}_1^{(1)},$$

gdzie $\mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{x}_1$, otrzymujemy układ
$$\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & -6 & 7 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$
 którego rozwiązaniem

jest $\mathbf{x}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$. Wektor główny rzędu drugiego jest wyznaczony z

dokładnością do wektora głównego pierwszego rzędu (czyli wektora własnego). Możemy wybrać np.

$\mathbf{x}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zauważmy, że wektory $\mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}$ i $\mathbf{x}_2$ są liniowo niezależne.