

Rozważmy przestrzeń V nad ciałem $K=C$, $\dim V=n$ i endomorfizm $T:V \rightarrow V$ reprezentowany przez (zespoloną) macierz A . Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\det(\lambda E - A) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{n_i}, \text{ gdzie}$$

λ_i są różnymi wartościami własnymi o krotnościach n_i . Oczywiście $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Mamy więc $k \leq n$ różnych wartości własnych, którym odpowiadają liniowo niezależne wektory własne. Jeżeli liczba liniowo niezależnych wektorów własnych jest mniejsza niż $\dim V=n$, to szukamy wektorów głównych odpowiadających wartościom własnym.

Dowodzi się że

1. wektory główne (w szczególności własne) odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne
2. wektory główne kolejnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne
3. dla s -krotnej wartości własnej λ istnieje dokładnie s odpowiadających jej wektorów głównych (wśród nich są wektory własne)

Wniosek. W n - wymiarowej przestrzeni V nad ciałem $K=C$ istnieje baza złożona z wektorów głównych (część z nich to wektory własne)

Postać Jordana macierzy endomorfizmu

Rozważmy przestrzeń V nad ciałem $K=C$, $\dim V=n$ i endomorfizm $T:V \rightarrow V$ reprezentowany przez (zespoloną) macierz A w pewnej ustalonej bazie. Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\det(\lambda E - A) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{n_i}, \text{ gdzie}$$

λ_i są różnymi wartościami własnymi o krotnościach n_i . Oczywiście $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

W bazie złożonej z wektorów głównych macierz endomorfizmu ma postać blokową

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix},$$

gdzie k oznacza liczbę różnych wartości własnych. I-ty blok diagonalny ma postać

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{i2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{ip_i} \end{bmatrix}_{(n_i, n_i)},$$

gdzie p_i jest liczbą liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ_i , czyli $p_i = \dim V_{\lambda_i} = \dim \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})$.

Bloki diagonalne $\mathbf{J}_{il}$ zwane klatkami Jordana są postaci

$$\mathbf{J}_{il} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć rozmiary klatek trzeba wyznaczyć wektory główne

Przykład.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

Liczba $\lambda=2$ jest czterokrotną wartością własną.

Szukamy wektorów własnych odpowiadających $\lambda=2$ rozwiązując układ równań $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mamy więc 3 liniowo niezależne wektory własne macierzy A : $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

którym przy wyjściowej bazie odpowiadają wektory własne endomorfizmu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$. Dowolny wektor własny macierzy A jest postaci $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3$, któremu odpowiada wektor własny $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3$ endomorfizmu.

Szukamy jeszcze jednego wektora głównego macierzy A rozwiązując układ równań

$$(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & -1 & 2 & -1 & \alpha & 0 & -1 & 2 & -1 & \alpha \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2\beta - \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta - \gamma - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \alpha \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & -1 & 2 & -1 & \alpha & 0 & -1 & 2 & -1 & \alpha \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2\beta - \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta - \gamma - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \alpha \end{array}$$

Aby układ miał rozwiązanie muszą być spełnione warunki: $\beta=0, \gamma+\alpha=0$.

Widać, że nie dla każdego wektora własnego istnieje wektor główny. Wybierzmy więc takie parametry, dla których istnieje rozwiązanie np. $\alpha=1, \beta=0, \gamma=-1$, którym odpowiada wektor własny $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$, dla którego istnieje wektor główny rzędu 2.

Wówczas układ redukuje się do postaci $0 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \mid 1$ i ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 3 parametrów u, v, w :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Widać, że wektor główny rzędu 2 jest wyznaczony z dokładnością do wektora głównego rzędu 1 (czyli wektora własnego). Wybierzmy parametry $u=v=w=0$, co prowadzi do wektora głównego macierzy A

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ odpowiadającego wektorowi własnemu } \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 \text{ któremu odpowiada wektor główny}$$

endomorfizmu $\mathbf{v}_4$.

W przestrzeni własnej $V_{\lambda=2} = \text{span} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ wybieramy inną bazę tak, aby jednym z wektorów bazy był wektor własny $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ dla którego istnieje wektor główny rzędu 2 np. $V_{\lambda=2} = \text{span} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \}$.

Uzupełniając wektory własne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ wektorem głównym $\mathbf{v}_4$ otrzymujemy nową bazę $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$. Z konstrukcji widać, że

$$T(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) = 2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3), T(\mathbf{v}_4) = 2\mathbf{v}_4 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3).$$

Stąd macierz endomorfizmu T w bazie $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ ma postać

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

składająca się z 3 klatek $[2]$, $[2]$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ na przekątnej i uzupełniona zerami.

Macierz przejścia od wyjściowej bazy do bazy $B=(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ jest postaci

$$\mathbf{P}=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suma algebraiczna i suma prosta podprzestrzeni.

Niech $V_1 \subset V$ i $V_2 \subset V$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Oznaczmy przez

$$V_1 + V_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 : \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2\} \subset V$$

zbiór wszystkich wektorów przestrzeni V , które można przedstawić w postaci sumy wektorów odpowiednio z V_1 i V_2 .

Łatwo sprawdzić, że V_1+V_2 jest podprzestrzenią przestrzeni V . Rzeczywiście, jeżeli

$$\mathbf{u} \in V_1 + V_2 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_1 \in V_1, \mathbf{u}_2 \in V_2,$$

$$\mathbf{w} \in V_1 + V_2 \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_1 \in V_1, \mathbf{w}_2 \in V_2,$$

to $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) \in V_1 + V_2$ i $\alpha \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 \in V_1 + V_2$

Podprzestrzeń V_1+V_2 nazywamy **sumą algebraiczną** podprzestrzeni V_1 i V_2 . Jeśli część wspólna $V_1 \cap V_2$ podprzestrzeni V_1 i V_2 (która jest również podprzestrzenią przestrzeni V) jest podprzestrzenią składającą się jedynie z wektora zerowego $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$, to sumę algebraiczną V_1+V_2 nazywamy **sumą prostą** podprzestrzeni V_1 i V_2 , którą oznaczamy $V_1 \oplus V_2$. Można pokazać, że każdy wektor $\mathbf{v} \in V_1 \oplus V_2$

Tw. Każdy wektor $\mathbf{v} \in V_1 \oplus V_2$ da się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$$

Dowód. (nie wprost) Niech $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_1 \in V_1, \mathbf{u}_2 \in V_2$ i $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_1 \in V_1, \mathbf{w}_2 \in V_2$ różnymi przedstawieniami wektora $\mathbf{v}$. Wówczas odejmując stronami powyższe tożsamości otrzymujemy $\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2)$ skąd wynika, że $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1) \in V_1$ i

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1) = -(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2) \in V_2. \text{ Wobec tego } (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1) \in V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}, \text{ czyli } \mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1.$$

Podobnie $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2$.