

dr Adam Ćmiel, A3-A4 p.311a, tel. (617) 31-72,

cmiel@agh.edu.pl

<http://home.agh.edu.pl/~cmiel>

Podręczniki:

- **Gewert M, Skoczylas Z. Analiza matematyczna 1 i 2. Ofic.wyd. GIS**
Definicje twierdzenia i wzory, Przykłady i zadania, Kolokwia i egzaminy
- **Gewert M, Skoczylas Z. Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej. Ofic.wyd. GIS**
- **Gewert M, Skoczylas Z. Elementy analizy wektorowej. Ofic.wyd. GIS**
- Rudin W. Podstawy analizy matematycznej
- Leja F. Rachunek różniczkowy i całkowy
- Żakowski W. i inni Matematyka e

Zbiory zadań:

- **Gewert M, Skoczylas Z. Analiza matematyczna 1 i 2. Ofic.wyd. GIS (dla studentów Pol.Wrocł.)**
Przykłady i zadania, Kolokwia i egzaminy
- Banaś J., Wędrychowicz S. Zbiór zadań z analizy matematycznej
- Krysicki W. Analiza matematyczna w zadaniach cz. I i II
- Stankiewicz W. Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych cz. I (a i b) i II

WYBRANE PORZĄDKOWE WŁASNOŚCI ZBIORÓW LICZBOWYCH

$(N, \leq)$ jest dobrze uporządkowany $\Leftrightarrow \forall_{A \subset N} \exists_{n \in A}$

(tzn. w każdym podzbiorze zbioru N istnieje element najmniejszy)

$(Q, \leq)$ jest gęsto uporządkowany $\Leftrightarrow \forall_{x, y \in Q} \exists_{z \in Q} : x < z < y$ (uwaga $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ i $a \neq b$)

(tzn. pomiędzy dwoma liczbami wymiernymi zawsze można znaleźć trzecią liczbę wymierną)

$(R, \leq)$ jest uporządkowany w sposób ciągły :

Zasada ciągłości zbioru liczb rzeczywistych

- każdy ograniczony od góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych posiada kres górny
- każdy ograniczony od dołu podzbiór zbioru liczb rzeczywistych posiada kres dolny.

Definicje kresów podzbioru $A \subset R$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall_{x \in A} : x \leq M \\ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{y \in A} M - \varepsilon \leq y \end{cases} \quad m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall_{x \in A} : x \geq m \\ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{y \in A} m + \varepsilon \geq y \end{cases}$$

Zastosowanie zasady ciągłości do zdefiniowania potęgi $a \in R_+$ o dowolnym wykładniku

- potęga o wykładniku całkowitym $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-razy}}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$
- potęga o wykładniku wymiernym $a^{\frac{1}{n}} = \inf\{x \in Q : x > 0 \wedge x^n \geq a\}$; $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$
- potęga o wykładniku rzeczywistym $t \in R$
dla $a > 1$ $a^t = \inf\{a^x : x \in Q \wedge x \geq t\}$; dla $0 < a < 1$ $a^t = \left(\frac{1}{a}\right)^{-t}$

Uwagi o zasadzie indukcji matematycznej $\{T(n_0) \wedge (\forall_{n \geq n_0} T(n) \Rightarrow T(n+1))\} \Rightarrow \forall_{n \geq n_0} T(n)$

Zasada indukcji matematycznej jest konsekwencją dobrego uporządkowania zbioru N liczb naturalnych, czyli w każdym zbiorze dobrze uporządkowanym prawdziwa jest zasada indukcji matematycznej.

Dowód. Załóżmy, że $\{T(n_0) \wedge (\forall_{n \geq n_0} T(n) \Rightarrow T(n+1))\}$, czyli że prawdziwy jest poprzednik implikacji w zasadzie indukcji matematycznej. Niech $Z = \{n \geq n_0 : T(n) \text{ nie jest prawdziwa}\}$. Jeżeli $Z = \emptyset$, to zachodzi zasada indukcji matematycznej. Jeżeli $Z \neq \emptyset$, to w Z istnieje element najmniejszy (dobre uporządkowanie Z) powiedzmy $m_0 \in Z$. **Uwaga:** $m_0 > n_0$ bo $T(n_0)$ jest prawdziwe. Ponieważ $m_0 - 1 \notin Z$ więc prawdziwe jest $T(m_0 - 1)$ a z założenia otrzymujemy, że prawdziwe jest $T(m_0)$, czyli $m_0 \notin Z$ – **sprzeczność** !

RODZINY ZBIORÓW I DZIAŁANIA UOGÓLNIONE

X – ustalony zbiór (przestrzeń), $T \neq \emptyset$ niepusty zbiór indeksów. Funkcja $T \ni t \rightarrow A_t \subset X$ określa rodzinę zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ indeksowaną indeksami t ze zbioru indeksów T .

Suma (unia) zbiorów rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$:

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in X : \exists_{t \in T} x \in A_t\}$$

to zbiór wszystkich tych elementów, które należą do przynajmniej jednego zbioru A_t z rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$

Iloczyn (przekrój-część wspólna) zbiorów rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$:

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in X : \forall_{t \in T} x \in A_t\}$$

to zbiór wszystkich tych elementów, które należą do wszystkich zbiorów rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$

Def. Granicą górną $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ ciągu zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy zbiór $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

Granicą dolną $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ciągu zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy zbiór $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

Łatwo zauważyć, że

$$x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n \ x \in A_m,$$

co oznacza, że granica górna ciągu zbiorów jest zbiorem składającym się z elementów, które należą do nieskończenie wielu zbiorów ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Podobnie

$$x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n \ x \in A_m,$$

co oznacza, że granica dolna ciągu zbiorów jest zbiorem składającym się z elementów, które należą do prawie wszystkich zbiorów ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bezpośrednio z definicji widać, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Jeżeli $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, to mówimy, że ciąg zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Przykład. $A_n = \left(\frac{-1}{n}, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1]$.

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Intuicja Para uporządkowana (x, y) to zbiór dwuelementowy w którym określono kolejność elementów- formalna definicja- później.

Niech A i B będą dwoma niepustymi zbiorami

Def: Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A, B \neq \emptyset$; nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

czyli zbiór par uporządkowanych, takich, że pierwszy element pary należy do pierwszego zbioru, a drugi element do drugiego zbioru.

Przykład. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\bullet, *\}$, $A \times B = \{(1, \bullet), (2, \bullet), (3, \bullet), (1, *), (2, *), (3, *)\}$

FUNKCJE

Wiadomo, że liczbę rzeczywistą można identyfikować z punktem na osi liczbowej a parę liczb z punktem na płaszczyźnie. Podobnie funkcję można identyfikować z jej wykresem. Prowadzi to do następującej definicji:

Def. Przez funkcję, której argumenty pochodzą ze zbioru X , a wartości z Y rozumiemy podzbiór $f \subset X \times Y$ iloczynu kartezjańskiego spełniający warunek

$$\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} \{(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f\} \Rightarrow y_1 = y_2,$$

czyli każdemu elementowi zbioru X odpowiada co najwyżej jeden element zbioru Y (warunek prawostronnej jednoznaczności)

$$\text{Różne zapisy: } (x, y) \in f \Leftrightarrow xfy \Leftrightarrow y = f(x)$$

Uwagi o mnogościowej definicji pary (a, b)

Para to ciąg 2-elementowy $\rightarrow$ ciąg to funkcja na zbiorze $N \rightarrow$ funkcja to relacja prawostronnie jednoznaczna $\rightarrow$ relacja to podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\rightarrow$ iloczyn kartezjański to zbiór par (błędne koło !- potrzebna formalna „zewnętrzna” definicja).

Definicja Kuratowskiego pary uporządkowanej (a, b) : $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Zdefiniowana powyżej para spełnia podstawowy warunek : $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Pojęcia związane z funkcjami

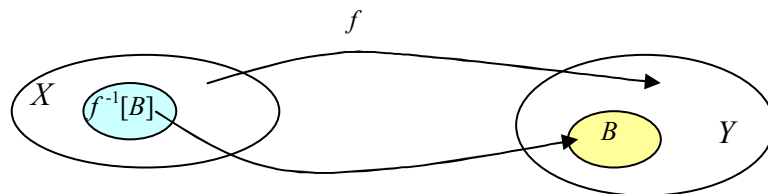
Dziedzina $D_f = \{x \in X : \exists_{y \in Y} y = f(x)\}$

Przeciwdziedzina $R_f = \{y \in Y : \exists_{x \in X} y = f(x)\}$

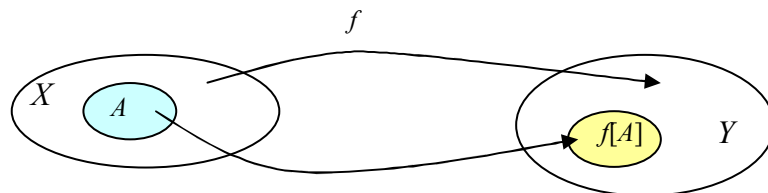
Niech $f: X \rightarrow Y$ i $D_f = X$. Wówczas funkcję nazywamy **odwzorowaniem** zbioru X

Def. (obcięcie funkcji) Jeżeli $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ to obcięciem funkcji f do zbioru A nazywamy funkcję $f|_A: A \rightarrow Y$, taką że $\forall x \in A \ f|_A(x) = f(x)$ (zawężenie dziedziny)

Def. Przeciwobrazem zbioru $B \subset Y$ (poprzez funkcję f) nazywamy zbiór $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$



Def. Obrazem zbioru $A \subset X$ (poprzez funkcję f) nazywamy zbiór $f[A] = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\} \subset Y$



Przeciwobraz zachowuje wszystkie operacje mnogościowe, a obraz tylko niektóre.

Przeciwobraz	Obraz
$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$	$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2]$
$f^{-1}[\bigcup_{t \in T} B_t] = \bigcup_{t \in T} f^{-1}[B_t]$	$f[\bigcup_{t \in T} A_t] = \bigcup_{t \in T} f[A_t]$
$f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] = \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$	$f[\bigcap_{t \in T} A_t] \subset \bigcap_{t \in T} f[A_t]$

Np: $f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] = \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$, bo $x \in f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] \Leftrightarrow x \in \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{t \in T} B_t \Leftrightarrow \forall t \in T : f(x) \in B_t \Leftrightarrow \\
 &\forall t \in T : x \in f^{-1}[B_t] \Leftrightarrow x \in \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]
 \end{aligned}$$

Podobnie $f[\bigcap_{t \in T} A_t] \subset \bigcap_{t \in T} f[A_t]$, bo

$$\begin{aligned}
 y \in f[\bigcap_{t \in T} A_t] &\Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{t \in T} A_t : y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in X \forall t \in T : x \in A_t \wedge y = f(x) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall t \in T \exists x \in X : x \in A_t \wedge y = f(x) \Leftrightarrow \forall t \in T \exists x \in A_t : y = f(x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \forall t \in T y \in f[A_t] \Leftrightarrow y \in \bigcap_{t \in T} f[A_t]
 \end{aligned}$$

Uwaga. Implikacji w powyższym rozumowaniu nie można zastąpić równoważnością, gdyż

$$\exists t \in T \forall x \in X \ \varphi(x, t) \Rightarrow \forall x \in X \exists t \in T \ \varphi(x, t) \text{ (por. wykład z algebry).}$$

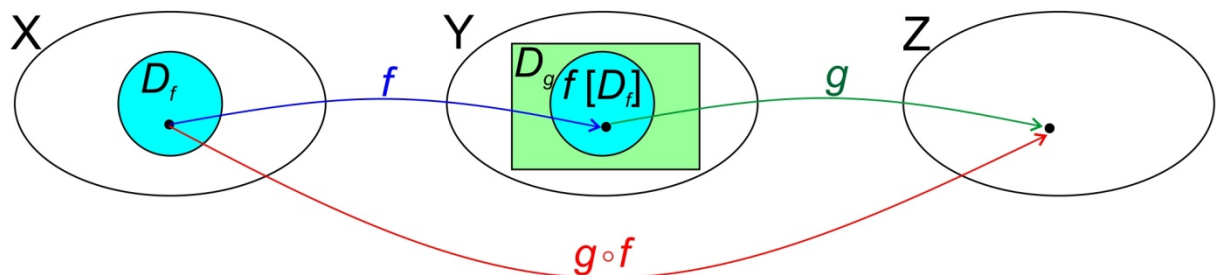
Ważne typy funkcji (odwzorowań): $(f : X \rightarrow Y, D_f = X)$

- f jest różnowartościowa (injekcja) $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- f jest funkcją „na” (surjekcją) $\Leftrightarrow f[X] = Y$ (każde wartości z zbioru Y jest funkcyjnie osiągalna)
- f jest funkcją wzajemnie jednoznaczna (bijekcją) $\Leftrightarrow$ jest injekcją i surjekcją jednocześnie

Złożenie funkcji:

$$f : X \supset D_f \rightarrow Y, \quad g : Y \supset D_g \rightarrow Z, \quad R_f = f[D_f] \subset D_g$$

$$(g \circ f) : X \ni x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Funkcja odwrotna

Jeśli funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją, to można zdefiniować funkcję odwrotną $f^{-1} : Y \rightarrow X$ do funkcji $f : X \rightarrow Y$ wzorem $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}$. Innymi słowy

$$f^{-1}(y) \stackrel{df}{=} x \Leftrightarrow y = f(x), \text{ gdzie } x \in X, y \in Y.$$

FUNKCJE RZECZYWISTE to funkcje o wartościach w R

Niech $f: X \rightarrow R$ i $g: X \rightarrow R$ będą funkcjami rzeczywistymi określonym na tym samym zbiorze X .

Def. (Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji rzeczywistych)

$$(f + g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{df}{=} \frac{f(x)}{g(x)} ; \quad \text{zał. } \forall x \in X \quad g(x) \neq 0$$

Def. Funkcja f jest **ograniczona z góry** gdy $\exists M \in R : \forall x \in X \quad f(x) \leq M$

Funkcja f jest **ograniczona z dołu** gdy $\exists m \in R : \forall x \in X \quad f(x) \geq m$

Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej.

Niech $f: R \supset D \rightarrow R$ będzie funkcją rzeczywista zmiennej rzeczywistej

Def.: f jest **rosnąca** w D $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f jest **niemalejąca** w $D \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f jest **malejąca** w $D \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f jest **nierosnąca** w $D \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Powyższe funkcje nazywamy funkcjami **monotonicznymi**

Funkcje okresowe

Def. f jest **okresowa** $\Leftrightarrow \exists_{t>0} \forall_{x \in D} (x \pm t) \in D \wedge f(x \pm t) = f(x)$

Dodatnią liczbę $T = \inf\{t > 0 : \forall_{x \in D} (x \pm t) \in D \wedge f(x \pm t) = f(x)\}$ (o ile istnieje) nazywamy **okresem podstawowym**.

Uwaga. Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ jest okresowa, a nie ma okresu podstawowego (jest **mikrookresowa**).

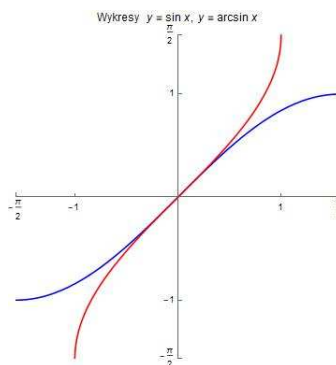
Def. f jest **parzysta** $\Leftrightarrow \forall_{x \in D} \quad -x \in D \wedge f(-x) = f(x)$

f jest **nieparzysta** $\Leftrightarrow \forall_{x \in D} \quad -x \in D \wedge f(-x) = -f(x)$

Funkcje cyklometryczne

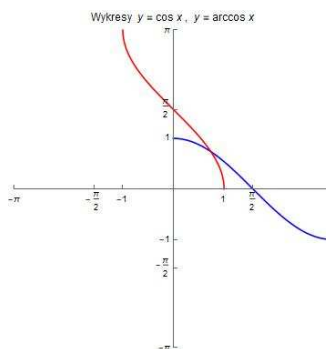
Rozważmy funkcję $y = \sin x$ obciętą do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji $\sin$, to funkcja $\arcsin$. Dokładniej

$$\begin{cases} y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \\ x \in [-1, 1] \quad , \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



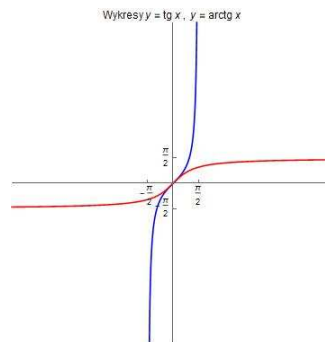
Rozważmy funkcję $y = \cos x$ obciętą do przedziału $[0, \pi]$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji $\cos$, to funkcja $\arccos$. Dokładniej

$$\begin{cases} y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \\ x \in [-1, 1] \quad , \quad y \in [0, \pi] \end{cases}$$



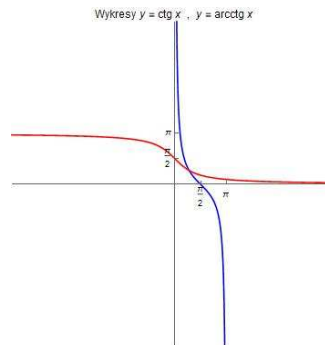
Rozważmy funkcję $y = \operatorname{tg} x$ obciętą do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji $\cos$, to funkcja arctg . Dokładniej

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



Rozważmy funkcję $y = \operatorname{ctg} x$ obciętą do przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji ctg , to funkcja arctg . Dokładniej

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \\ y \in (0, \pi) \end{cases}$$



Funkcje elementarne to funkcje stałe, potęgowe, wykładnicze, trygonometryczne, odwrotne do nich logarytmiczne, cyklometryczne, oraz takie funkcje, które można otrzymać z powyższych przez skończoną ilość działań arytmetycznych oraz złożień.

Funkcjami elementarnymi są więc wielomiany i funkcje wymierne.