

Równoliczność zbiorów

Def: $A \text{ rl } B \Leftrightarrow \exists f: A \xrightarrow{1:1} B$ (istnieje bijekcja jednego zbioru na drugi)

Przykład. $\{a, b, c\}$ i $\{1, 2\}$ – nie są równoliczne

Przykład. $A = \mathbb{N}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ – są równoliczne, bo istnieje bijekcja $f(k) = 2k - 1$ zbioru A na zbiór B .

Def: Zbiór A jest **skończony** jeżeli jest równoliczny ze zbiorem $\{1, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Zbiór A jest **nieskończony** $\Leftrightarrow \neg (A \text{ jest skończony})$

Charakteryzacja zbiorów nieskończonych

Zbiór A jest **nieskończony** $\Leftrightarrow \exists B \subset A, B \neq A: A \text{ rl } B$

(czyli zbiór nieskończony jest równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym).

Twierdzenie Cantora – Bernsteina

$$\{A \text{ rl } B_0 \subset B \wedge B \text{ rl } A_0 \subset A\} \Rightarrow A \text{ rl } B$$

Def: Zbiór A jest **przeliczalny** $\Leftrightarrow A \text{ rl } \mathbb{N}$ (inaczej elementy zbioru przeliczalnego można

ponumerować liczbami naturalnymi)

Zbiór A jest **co najwyżej przeliczalny** $\Leftrightarrow A$ jest skończony lub przeliczalny

Zbiór A jest **nieprzeliczalny** $\Leftrightarrow A$ jest nieskończony i $\neg (A \text{ rl } \mathbb{N})$

Fakty: (metodą przekątniową można pokazać, że)

- Iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

Zbiory A i B są przeliczalne więc $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (a_1, b_1)_1 & (a_1, b_2)_2 & (a_1, b_3)_4 & (a_1, b_4)_7 & \dots \\ (a_2, b_1)_3 & (a_2, b_2)_5 & (a_2, b_3)_8 & (a_2, b_4)_{12} & \dots \\ (a_3, b_1)_6 & (a_3, b_2)_9 & (a_3, b_3)_{13} & (a_3, b_4)_{18} & \dots \\ (a_4, b_1)_{10} & (a_4, b_2)_{14} & (a_4, b_3)_{19} & (a_4, b_4)_{25} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Bmatrix}$$

$$f(i, j) = \frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + i \text{ jest bijekcją } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ na } \mathbb{N} \text{ (znaleźć } f^{-1} \text{ - ćwiczenia)}$$

(Wskazówka: element (i, j) jest i -tym elementem na na $(i+j-1)$ -szej przekątnej)

- $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny, (jako wniosek, bo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (przel.) i $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$)
- Suma (mnogościowa) przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym
Dowód jak dla iloczynu kartezjańskiego

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots$$

$$A_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots$$

$\vdots$

- R jest nieprzeliczalny (R nie jest $(0,1)$ a $(0,1)$ jest nieprzeliczalny- dowód nie wprost metodą przekątniową lub zasadą szufladkową Dirichleta)

Funkcja $f(x) = \frac{1}{\pi} \arctg(x) + \frac{1}{2}$ jest bijekcją zbioru R na przedział $(0,1)$. Po przyjęciu umowy, że te rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych, które są skończone zastępujemy rozwinięciami nieskończonymi mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi z przedziału $(0,1)$ a ciągami cyfr rozwinięcia dziesiętnego).

Dla dowodu nie wprost założmy, że wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $(0,1)$ można ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi)

$$a_1 = 0, a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3}, \dots$$

$$a_2 = 0, a_{2,1} a_{2,2} a_{2,3}, \dots$$

$$a_3 = 0, a_{3,1} a_{3,2} a_{3,3}, \dots$$

$\vdots$

Rozważmy liczbę $c = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$ z przedziału $(0,1)$ taką, że $c_i \neq a_{i,i}, c_i \neq 0, c_i \neq 9$. Liczba c różni się od każdej z liczb a_i i -tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego, więc nie występuje w tym ciągu -sprzeczność!

CIĄGI RZECZYWISTE

Ciągiem o wyrazach rzeczywistych nazywamy rzeczywistą funkcję $a : N \rightarrow R$ określoną na zbiorze liczb naturalnych

$$1 \rightarrow a(1) = a_1$$

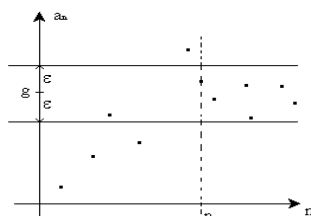
$$2 \rightarrow a(2) = a_2$$

itd.

Oznaczenia: a_n - n -ty wyraz ciągu (a_n) - ciąg o wyrazie ogólnym a_n

Def. (granicy ciągu) Ciąg (a_n) jest **zbieżny do g** (co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$) gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 |a_n - g| \leq \varepsilon.$$



Twierdzenie (o jednoznaczności granicy). Jeżeli ciąg a_n ma granicę, to tylko jedną.

Dowód (Nie wprost). Przypuśćmy, że ciąg ten ma dwie różne granice g_1 i g_2 . Weźmy $\varepsilon = \frac{|g_1 - g_2|}{3}$. W przedziale $[g_2 - \varepsilon, g_2 + \varepsilon]$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Rightarrow$ w przedziale $[g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon]$ leży skończona ilość wyrazów ciągu, co przeczy temu, że g_1 jest granicą ciągu.

Def: Ciąg rozbieżny, to ciąg, który nie jest zbieżny.

Szczególnie ważne są dwa typy ciągów rozbieżnych

- rozbieżny do $+\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall_M \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} : \forall_{n \geq n_0} a_n \geq M$
- rozbieżny do $-\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_m \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} : \forall_{n > n_0} a_n \leq m$

Zbieżność, a ograniczoność

Tw: Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony (inaczej- warunkiem koniecznym zbieżności ciągu jest jego ograniczoność)

Dowód: Niech g – oznacza granicę a_n . Wybierając $\varepsilon=1$, z definicji granicy prawie wszystkie wyrazy (to znaczy wszystkie począwszy od n_0) ciągu leżą w przedziale $[g-1, g+1]$. Poza przedziałem może być jedynie skończona liczba wyrazów. Stąd

$$\forall_n |a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |g-1|, |g+1|\} = M$$

Uwaga Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe

Np. $a_n = (-1)^n$ pokazuje, że ograniczoność nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności.

Niech (n_k) będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych a (a_n) dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych.

Ciąg (a_{n_k}) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n) . Podciąg otrzymujemy więc z ciągu pomijając niektóre jego wyrazy.

Tw. Bolzano-Weierstrassa. Z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód (szkic). Ciąg jest ograniczony, a więc wszystkie jego wyrazy leżą w pewnym przedziale domkniętym. Dzielimy ten przedział na dwa przedziały domknięte równej długości. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Z tego przedziału wybieramy jeden z wyrazów a dla wybranego przedziału domkniętego powtarzamy powyższe czynności wybierając wyraz ciągu o numerze wyższym niż wybrany w poprzednim kroku itd. Dostajemy ciąg przedziałów domkniętych i pewien podciąg. Częścią wspólną zstępującego ciągu przedziałów domkniętych jest dokładnie jeden punkt – granica wybranego podciągu.

Tw. Jeżeli ciąg ma granicę, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g.$$

Dow. W przedziale $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) a więc także prawie wszystkie wyrazy podciągu (a_{n_k}) .

Tw. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Dow. Rozważmy przypadek ciągu rosnącego (a_n) , ograniczonego od góry (dla malejącego i ograniczonego od dołu – analogicznie).

Niech $\{a_1, a_2, \dots\}$ oznacza zbiór wyrazów ciągu (a_n) : jest to podzbiór R .

Z założenia $\{a_1, a_2, \dots\}$ jest ograniczony od góry $\Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq M$

Z zasady ciągłości zbioru R istnieje (dokładnie jedna liczba rzeczywista) $g = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$

Z definicji kresu $\forall_n a_n \leq g$ i $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} a_{n_0} \geq g - \varepsilon$, a z założenia monotoniczności

$$\forall_{n \geq n_0} a_n \geq g - \varepsilon$$

Podsumowując te fakty:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_0} g - \varepsilon \leq a_n \leq g$$

$$\Downarrow$$

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq g + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - g| \leq \varepsilon$$

co oznacza, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Przykład 1. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left. \begin{array}{l} \forall_n a_n \leq 3 \text{ - ograniczony od góry} \\ \forall_n a_{n+1} > a_n \text{ - } \uparrow \end{array} \right\} \Rightarrow \text{istnieje granica (powiedzmy } e) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z „innych” obliczeń wiadomo, że $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182818\dots$.

- Ograniczoność ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!n^k} = \\ &= 2 + \frac{(1-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n})}{n!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 \end{aligned}$$

bo dla $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$

- Monotoniczność ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \frac{(1-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n})}{n!} \\ a_{n+1} &= 2 + \frac{(1-\frac{1}{n+1})}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}{3!} + \dots + \frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) \cdots (1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!} + \frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) \cdots (1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Widać, że składniki wyrazu a_{n+1} są większe lub równe od odpowiadających im składników wyrazu

a_n . Ponadto ciąg a_{n+1} zawiera dodatkowo dodatni składnik $\frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) \cdots (1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!}$.

Przykład 2 $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq 2 \text{ - ograniczony od góry} \\ \forall_n a_{n+1} > a_n \text{ - } \uparrow \end{array} \right\} \Rightarrow \text{jest zbieżny do } g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Ze wzoru ogólnego $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Dokonując w tej równości przejścia granicznego ($a_{n+1} \rightarrow g$ i $a_n \rightarrow g$) otrzymujemy: $g = \sqrt{2 + g}$. Stąd $g=2$.

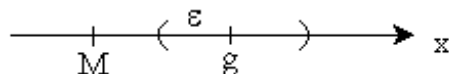
Nierówności w przejściach granicznych

Tw. O zachowaniu słabej nierówności

$$\forall_{n \geq n_0} a_n \leq M \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Rightarrow g \leq M$$

$$\forall_{n \geq n_0} a_n \geq m \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Rightarrow g \geq m$$

Dow. (a.a.)



Niech $g > M$. Weźmy $\varepsilon = \frac{g-M}{2}$ (połowa odległości między g i M). Z def. granicy prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w przedziale $[g-\varepsilon, g+\varepsilon] \rightarrow$ sprzeczność!

UWAGA: Nierówności ostre nie zachowują się w przejściach granicznych!

$$\text{Np. } \forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} > 0 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Konsekwencją twierdzenia o zachowaniu słabej nierówności w przejściach granicznych jest następujące

Tw. (o trzech ciągach)

$$\left(\forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

Jako wniosek z powyższego uzyskujemy

$$\text{Tw. } \forall_{n \geq n_0} |a_n| \leq M \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Arytmetyka granic

Tw. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (\forall_n b_n \neq 0 \text{ i } b \neq 0)$

$$\text{Dow. (punktu 3). } 0 \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \left| \frac{a_n b - a_n b_n + a_n b_n - a b_n}{b_n b} \right| \leq \frac{|a_n|}{|b_n| |b|} |b_n - b| + \frac{1}{|b|} |a_n - a|$$

Ciąg (a_n) (jako zbieżny) jest ograniczony powiedzmy przez M . Z faktu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$ wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = |b| > 0 \text{ a stąd } |b_n| \geq \frac{|b|}{2} \text{ dla prawie wszystkich } n. \text{ Wobec tego } \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|} \text{ dla prawie}$$

wszystkich n .

Otrzymujemy więc dla prawie wszystkich n nierówność $0 \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{2M}{b^2} |b_n - b| + \frac{1}{|b|} |a_n - a|$ z

której z twierdzenia o trzech ciągach i z punktu 1 otrzymujemy tezę.

Inne własności:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ $\frac{1}{\pm\infty} = 0$
- b) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n \geq n_0} a_n > 0 \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ $\frac{1}{0^+} = \infty$
- c) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n \geq n_0} a_n < 0 \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ $\frac{1}{0^-} = -\infty$
- d) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty$ $a > 0 \Rightarrow a \infty = \infty$
- e) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ $\frac{a}{\infty} = 0$
- f) $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$ $a < 0 \Rightarrow a \infty = -\infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Warunek Cauchy'ego. Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, gdy

$$(C) \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n, m \geq n_0} |a_m - a_n| \leq \varepsilon.$$

Uwaga. Nie ma tu mowy o granicy

Def. Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego nazywamy ciągiem **fundamentalnym**

Tw. Dla ciągu liczb rzeczywistych prawdziwa jest równoważność:

(a_n) - zbieżny $\Leftrightarrow$ ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego

Dowód. ($\Rightarrow$) Z założenia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ mamy $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} : \forall_{n \geq n_0} |a_n - g| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd dla $m, n \geq n_0$ mamy

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - g| + |a_m - g| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ czyli spełniony jest warunek (C).}$$

($\Leftarrow$)(**Szkie**) ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego $\Rightarrow$ ciąg (a_n) jest ograniczony $\Rightarrow$ (tw. Bolzano-

Weierstrassa) (a_{n_k}) jest podciągiem zbieżnym do g . Stąd $|a_n - g| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g|$. Ale $|a_n - a_{n_k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

dla $n, n_k \geq n_0$ (z war. C) a $|a_{n_k} - g| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ bo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$. Wobec tego $|a_n - g| \leq \varepsilon$ dla $n \geq n_0$.

Ważne granice ciągów

1) Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$. Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0 \quad (p > 0, \alpha > 0)$$

$$\text{Ad 2. } \forall n \geq 2 \quad \sqrt[n]{n} \geq 1, \text{ stąd } \forall n \geq 2 \quad \sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall n \geq 2 \quad n = (1 + \varepsilon_n)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \varepsilon_n^k \geq \binom{n}{2} \varepsilon_n^2 \Rightarrow \forall n \geq 2 \quad n \geq \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon_n^2 \Rightarrow \forall n \geq 2 \quad 0 \leq \varepsilon_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Ad 3 Podobnie jak (2)

$$\text{Ad 4. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - g \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{Stąd np. dla } \varepsilon = \frac{1-g}{2}$$

$$\exists n_0 \forall n > n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq g + \varepsilon = g_1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} |a_{n_0+1}| \leq g_1 |a_{n_0}|, \\ |a_{n_0+2}| \leq g_1 |a_{n_0+1}| \leq g_1^2 |a_{n_0}|, \\ \vdots \\ |a_{n_0+k}| \leq g_1^k |a_{n_0}| \end{cases}$$

Otrzymaliśmy więc oszacowanie $\forall k \quad 0 \leq |a_{n_0+k}| \leq g_1^k |a_{n_0}|$. Stąd z tw. o trzech ciągach $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_0+k}| = 0$.

$$\text{Ad 5. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \left| \sqrt[n]{|a_n|} - g \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{Stąd np. dla } \varepsilon = \frac{1-g}{2}$$

$$\exists n_0 \forall n > n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq g + \varepsilon = g_1 < 1 \Rightarrow \exists n_0 \forall n > n_0 \quad |a_n| \leq g_1^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\text{Ad 6. Wystarczy skorzystać z (4) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{(1+p)^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+p} < 1$$