

Granica funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej

Def. Punkt $x_0 \in R$ jest **punktem skupienia** zbioru $D \subset R \Leftrightarrow$ istnieje ciąg $(a_n) \subset D$ taki, że

$$\forall_n a_n \neq x_0 \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

Granica funkcji w punkcie skupienia

Niech $f: R \supset D \rightarrow R$ i $x_0 \in R$ będzie punktem skupienia zbioru D (dziedziny funkcji f)

Def. (Heine) Liczba $g \in R$ jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset D - \{x_0\}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Powyższa definicja jest równoważna następującej

Def. (Cauchy) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - g| \leq \varepsilon$

Komentarz: Założenie, że $x_0 \in R$ jest punktem skupienia zbioru dziedziny D gwarantuje, że istnieje w dziedzinie przynajmniej jeden ciąg zbieżny do x_0 . Punkt x_0 nie musi należeć do D , czyli funkcja nie musi być określona w x_0 . Nawet jeśli funkcja jest określona w x_0 , to wartość funkcji w tym punkcie nie wpływa na granicę funkcji.

Dowód równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego

(H $\Rightarrow$ C) Dla dowodu nie wprost załóżmy że spełniony jest warunek z def. H i nie jest spełniony warunek z def. C, czyli $\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{x \in D} \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta \wedge |f(x) - g| > \varepsilon$. Przyjmując $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ wnosimy o istnieniu takiego ciągu (x_n) , że $0 < |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - g| > \varepsilon$, co przeczy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

(C $\Rightarrow$ H). Zakładamy, że spełniony jest warunek z def. C. Ze zbieżności $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ wynika, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) spełniają warunek $0 < |x_n - x_0| \leq \delta$, co pociąga za sobą spełnienie przez prawie wszystkie wyrazy ciągu $(f(x_n))$ warunku $|f(x_n) - g| \leq \varepsilon$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

Własności arytmetyczne granic funkcji rzeczywistych

Rozważmy dwie funkcje $f, g : R \supset D \rightarrow R$ określone na tym samym zbiorze D . Niech punkt x_0 będzie punktem skupienia zbioru D .

Tw. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, to

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = a - b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{a}{b}$ gdy $b \neq 0 \wedge \forall_x g(x) \neq 0$

Dow. Twierdzenie powyższe jest natychmiastową konsekwencją definicji Heine'go granicy funkcji w punkcie i własności arytmetycznych granic ciągów liczb rzeczywistych.

Ważne granice

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; (jako wniosek $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$)
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ ($\alpha \in R$) (najpierw rozważa się $\alpha \in Q$ i stosuje tw. o 3 ciągach)
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Granice niewłaściwe i granice w nieskończoności

$f : R \supset D \rightarrow R$, $D \neq \emptyset$, x_0 - punkt skupienia zbioru D .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{(C)} \quad \forall_{M>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D} \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M \\ \text{(H)} \quad \forall_{(x_n) \subset D - \{x_0\}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{(C)} \quad \forall_{m<0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D} \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq m \\ \text{(H)} \quad \forall_{(x_n) \subset D - \{x_0\}} \forall_{x_n \neq x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty \end{array}$$

Jeśli zbiór D (dziedzina funkcji) jest prawostronnie nieograniczony to możemy zdefiniować

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{(C)} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{M > 0} \forall_{x \in D} x \geq M \Rightarrow |f(x) - g| \leq \varepsilon \\ & \text{(H)} \quad \forall_{(x_n) \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \end{aligned}$$

Jeśli zbiór D (dziedzina funkcji) jest lewostronnie nieograniczony to możemy zdefiniować

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{(C)} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m < 0} \forall_{x \in D} x \leq m \Rightarrow |f(x) - g| \leq \varepsilon \\ & \text{(H)} \quad \forall_{(x_n) \subset D} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = g \end{aligned}$$

Granice jednostronne

$f : R \supset D \rightarrow R$, x_0 - punkt skupienia zbioru $D \cap (x_0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{(C)} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} 0 < x - x_0 \leq \delta \Rightarrow |f(x) - g| \leq \varepsilon \\ & \text{(H)} \quad \forall_{(x_n) \subset D \cap (x_0, +\infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \end{aligned}$$

Tw. Gdy x_0 jest punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, x_0)$ i zbioru $D \cap (x_0, +\infty)$ to funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g (właściwą lub niewłaściwą) $\Leftrightarrow f$ ma w punkcie x_0 granice lewo- i prawostronne i są one równe g .

Symbol o – porównywanie nieskończenie małych

$f, g : R \supset D \rightarrow R$, $D \neq \emptyset$, x_0 - punkt skupienia zbioru D ,

Def. Mówimy, że f i g są nieskończenie małe w przejściu granicznym $x \rightarrow x_0$, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Def. Piszemy, że $f(x) = o(g(x))$ przy $x \rightarrow x_0$ jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ($f(x)$ jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż $g(x)$).

Przykłady

- $x^2 = o(x)$ gdy $x \rightarrow 0$ bo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$
- $\sin^2 x = o(x)$ gdy $x \rightarrow 0$ bo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$

Ciągłość funkcji w punkcie

Def. Funkcję $f : R \supset D \rightarrow R$ nazywamy ciągłą w punkcie $x_0 \in D$ jeżeli

- Heine $\forall (x_n) \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$
- Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Uwaga: Punkt $x_0 \in D$ ale nie musi być punktem skupienia zbioru D . Jeżeli $x_0 \in D$ jest punktem izolowanym zbioru D , to z definicji funkcja jest ciągła w punkcie izolowanym. Jeżeli natomiast $x_0 \in D$ jest punktem skupienia zbioru D , to z definicji funkcja jest ciągła w punkcie skupienia $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ciągłość punktowa funkcji $f : R \supset D \rightarrow R$

Def. Funkcja $f : R \supset D \rightarrow R$ jest **punktowo ciągła** w D , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru

$$D, \text{ czyli } \begin{aligned} (C) \quad & \forall t \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(t, \varepsilon) > 0 \forall x \in D \quad |x - t| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon \\ (H) \quad & \forall t \in D \forall (x_n) \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = t \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(t) \end{aligned}$$

Ciągłość jednostajna

Def. Funkcja $f : R \supset D \rightarrow R$ jest **jednostajnie ciągła** w D gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in D \forall x \in D \quad |x - t| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy korzystając z tautologii $\{\exists x \forall y : \varphi(x, y)\} \Rightarrow \{\forall y \exists x : \varphi(x, y)\}$

Tw. Jeżeli f jest **jednostajnie ciągła** na D , to f jest **punktowo ciągła** na D .

Problem. Jak praktycznie badać jednostajną ciągłość funkcji?

Użytecznym pojęciem jest tzw. moduł ciągłości funkcji.

Def. Modułem ciągłości funkcji $f : R \supset D \rightarrow R \cup \{\infty\}$ nazywamy funkcję

$$\omega_f(\delta) = \omega(f, \delta) \stackrel{df}{=} \sup \{ |f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in D \wedge |x_1 - x_2| \leq \delta \}$$

Tw. Funkcja $f : R \supset D \rightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła na $D \Leftrightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \omega(f, \Delta) = 0$

Dowód . $f : R \supset D \rightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła na D

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \forall y \in D |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta \leq \delta \omega(f, \Delta) \leq \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \omega(f, \Delta) = 0$$

Przykład. Pokazać, że $f(x) = \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $D = [0, \infty)$

$$\omega(f, \Delta) = \sup_{x_1, x_2 \in D} \{ |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| : |x_1 - x_2| \leq \Delta \} = \sup_{x \geq 0} \{ |\sqrt{x + \Delta} - \sqrt{x}| \} = \sup_{x \geq 0} \left\{ \frac{x + \Delta - x}{\sqrt{x + \Delta} + \sqrt{x}} \right\} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta}} = \sqrt{\Delta}$$

Stąd $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \omega(f, \Delta) = 0$, więc f jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, \infty)$.

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Tw. (Weierstrassa) Jeżeli funkcja $f : R \supset [a, b] \rightarrow R$ jest ciągła na $[a, b]$, to f – ograniczona i

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ i } f(x_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

Dowód. Ograniczoność od góry. Dla dowodu nie wprost założmy, że funkcja f nie jest ograniczona do góry. Istnieje więc ciąg $(x_n) \subset [a, b]$ taki że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że z ograniczonego ciągu (x_n) można wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny tzn. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$.

Z ciągłości funkcji f otrzymujemy $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$, co jest w sprzeczności z faktem $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$ (każdy podciąg ciągu rozbieżnego do nieskończoności jest rozbieżny do nieskończoności).

Osiąganie kresu górnego $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Jeśli kres górny M zbioru wartości funkcji nie jest

osiągnięty, to jest on punktem skupienia zbioru wartości funkcji. Istnieje więc ciąg $(x_n) \subset [a, b]$ taki że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg zbieżny $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$.

Z ciągłości funkcji f otrzymujemy $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = M$

Tw. (Darboux) (o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Jeżeli $f : R \supset I \rightarrow R$ - ciągła na przedziale I , to

$$\forall_{x_1, x_2 \in I} \forall_{y \in R} f(x_1) < y < f(x_2) \Rightarrow \exists_{x \in I(x_1, x_2)} y = f(x)$$

gdzie $I(x_1, x_2)$ - przedział o końcach $l_1 = \min\{x_1, x_2\}$ i $p_1 = \max\{x_1, x_2\}$

Dowód Rozważmy pomocniczą funkcję $g(x) = f(x) - y$. Funkcja g przyjmuje na końcach przedziału $[l_1, p_1]$ gdzie $l_1 = \min\{x_1, x_2\}$ i $p_1 = \max\{x_1, x_2\}$ wartości różnych znaków, tzn. $g(l_1)g(p_1) < 0$. Niech s_1 będzie środkiem przedziału $[l_1, p_1]$. Jeśli $g(s_1) = 0$, to twierdzenie zostało udowodnione. W przeciwnym przypadku rozważamy przedział $[l_2, p_2]$ zastępując jeden z końców l_1, p_1 punktem s_1 tak, aby $g(l_2)g(p_2) < 0$. Powtarzamy powyższą procedurę konstruując ciąg przedziałów $[l_n, p_n]$ i ich środków s_n . Jeśli dla pewnego n otrzymamy $g(s_n) = 0$, to twierdzenie jest udowodnione. Jeśli nie, to skonstruowaliśmy dwa ciągi zbieżne: niemalejący i ograniczony od góry (l_n) oraz nierosnący i ograniczony od dołu (p_n) przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - l_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n - l_1}{2^{n-1}} = 0$. Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = x$. Z tw. o zachowaniu słabej nierówności w granicy otrzymujemy $g^2(x) \leq 0$, więc $g(x) = 0$, co kończy dowód.

Tw. (Cantora) Funkcja $f : R \supset [a, b] \rightarrow R$ - ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ jest **jednostajnie ciągła** na $[a, b]$

Dow: (nie wprost.) Nieprawda, że f jest jednostajnie ciągła $\Leftrightarrow$

$$\sim \left[\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in [a, b]} \forall_{t \in [a, b]} |x - t| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon \right] \Leftrightarrow$$

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{x \in [a, b]} \exists_{x' \in [a, b]} |x - x'| \leq \delta \wedge |f(x) - f(x')| > \varepsilon. \text{ Dla każdego } \delta, \text{ czyli w szczególności dla } \delta = \frac{1}{n} \text{ też istnieją ciągi } (x_n), (t_n) \text{ takie, że } |x_n - t_n| \leq \frac{1}{n} \text{ i } |f(x_n) - f(t_n)| > \varepsilon \text{ (istnieje takie } \varepsilon).$$

Ponieważ (x_n) jest ciągiem w $[a, b]$, więc można z niego wybrać podciąg zbieżny $x_{n_k} \rightarrow c$. Z warunku trójkąta mamy $|t_{n_k} - c| = |t_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leq |t_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c|$, skąd wynika, że $t_{n_k} \rightarrow c$. Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$ i $f(t_{n_k}) \rightarrow f(c)$, więc $|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})| \rightarrow 0$, co przeczy warunkowi $|f(x_n) - f(t_{n_k})| > \varepsilon \quad \forall n$

Tw: (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeżeli funkcja $f : R \supset (a, b) \rightarrow R$ - ciągła na przedziale otwartym (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ i $f(x_0) > 0$, to istnieje otoczenie punktu x_0 (powiedzmy $K(x_0, \delta)$) takie, że $\forall x \in K(x_0, \delta) f(x) > 0$.

Dowód. (nie wprost) gdyby w każdym otoczeniu punktu x_0 istniały punkty w których $f'(x) \leq 0$, to istnieje ciąg tych punktów, zbieżny do x_0 . Z ciągłości funkcji i twierdzenia o zachowaniu słabej nierówności w przejściu granicznym wynika, że $f'(x_0) \leq 0$, sprzeczność

Tw. (o ciągłości funkcji odwrotnej). Jeżeli funkcja $f: R \supset I \rightarrow R$ (gdzie I – dowolny przedział) jest ciągła i rosnąca (malejąca), to funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła i rosnąca (malejąca).

Dowód. Niech f będzie ciągła i rosnąca w przedziale I . Z tw. Darboux wynika że „ciągły obraz przedziału jest przedziałem” $J=f[I]$ jest przedziałem a f jest funkcją różnowartościową. Istnieje więc $f^{-1}: J \rightarrow I$ i f^{-1} jest rosnąca (**dowód nie wprost**). Aby wykazać ciągłość funkcji f^{-1} w punkcie y_0 przedziału J , wystarczy wykazać, że jeśli $y_n \rightarrow y_0$, to $f^{-1}(y_n) = x_n \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$. Gdyby ciąg (x_n) nie dążył do granicy x_0 , to nieskończenie wiele wyrazów leżałoby na zewnątrz przedziału $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ czyli spełniałoby jedną z nierówności $x_n < x_0 - \varepsilon$, $x_n > x_0 + \varepsilon$. W pierwszym przypadku $y_n = f(x_n) < f(x_0 - \varepsilon) = f(x_0) - \eta_1$ (tu korzystamy z założenia, że f jest rosnąca). W drugim $y_n = f(x_n) > f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \eta_2$ (η_1 i $\eta_2 > 0$). Wobec tego nieskończenie wiele wyrazów y_n leżałoby na zewnątrz przedziału $(y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$ co przeczy założeniu, że $y_n \rightarrow y_0$.

Ciągłość złożenia

Tw. Jeżeli f jest ciągła w punkcie x_0 , a g jest ciągła w punkcie $f(x_0)$ to $g \circ f$ (złożenie f z g) jest ciągła w punkcie x_0 .

Tw. Jeżeli f jest ciągła na zbiorze A i g jest ciągła na zbiorze B i $f[A] \subset B$ to $g \circ f$ jest ciągła na zbiorze A .

Tw. Jeżeli f jest jednostajnie ciągła na zbiorze A i g jest jednostajnie ciągła na zbiorze B ($f[A] \subset B$), to $g \circ f$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze A .

Dowód. Powyższe twierdzenia są natychmiastową konsekwencją definicji złożenia funkcji i definicji (odpowiednio punktowej i jednostajnej) ciągłości funkcji.

Ciągłość sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej

$$f: R \supset D \rightarrow R ; \quad g: R \supset D \rightarrow R$$

Tw Jeżeli f i g są ciągłe w punkcie $x_0 \in D$, to $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) są ciągłe w punkcie x_0 .

Jeżeli f i g są ciągłe na zbiorze D , to $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($\forall_{x \in D} g(x) \neq 0$) są ciągłe na zbiorze D .

Jeżeli f i g są jednostajnie ciągłe na zbiorze D to, to $f + g$, $f - g$ są jednostajnie ciągłe na zbiorze D (funkcje $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ nie muszą być jednostajnie ciągłe)

Wnioski

1° Wielomian jest funkcją ciągłą, bo jest on sumą funkcji ciągłych oraz iloczynów funkcji ciągłych.

2° Funkcja wymierna jest ciągłą, bo jest ilorazem dwóch ciągłych wielomianów.

Dowodzi się, że

3° Funkcja potęgowa jest ciągła tzn. $\forall x_0 \in D \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ Z uwagi na równość $x^\alpha = x_0^\alpha \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$

wystarczy udowodnić ciągłość w punkcie $x_0=1$ tzn. $\lim_{x \rightarrow 1} x^\alpha = 1$ (**ćwiczenia**)

4° Funkcja wykładnicza jest ciągła $\forall x_0 \in D \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. Z uwagi na równość $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}$

wystarczy udowodnić ciągłość w punkcie $x_0=0$ (**ćwiczenia**)

5° Funkcje trygonometryczne są ciągłe np $\forall x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ (**ćwiczenia**)

Wnioski.

- Funkcje logarytmiczne i cyklometryczne są ciągłe (bo są odwrotne do funkcji ciągłych)
- **Funkcje elementarne**, czyli wszystkie powyższe oraz takie, które można otrzymać z poprzednich przez skończoną ilość działań arytmetycznych oraz złożzeń, są ciągłe w swoich naturalnych dziedzinach.

Nieciągłości

- f ma w x_0 nieciągłość usuwalną – istnieje granica w x_0 , ale $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- f ma w x_0 nieciągłość I-go rodzaju – istnieją granice jednostronne skończone i są one różne

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$
- f ma w x_0 nieciągłość II-go rodzaju – pozostałe przypadki.

Nieciągłości funkcji monotonicznych.

Tw. Jeżeli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to $\forall x_0 \in (a, b)$ istnieją $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \stackrel{df}{=} f(x_0^-)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{df}{=} f(x_0^+)$. Funkcja monotoniczna może mieć więc jedynie punkt nieciągłości I-go rodzaju.

Dow. (dla funkcji niemalejącej). Niech $x_0 \in (a, b)$ będzie punktem nieciągłości. Z monotoniczności $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ zbiór $\{f(x) : a < x < x_0\}$ jest ograniczonym od góry przez $f(x_0)$ podzbiorem zbioru liczb $\mathbb{R}$. Z zasady ciągłości $\mathbb{R}$ istnieje $A = \sup_{a < x < x_0} f(x)$. Naśladując dowód twierdzenia „ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny” pokazujemy, że $A = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
 Analogicznie $B = \inf_{x > x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Tw. Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej jest co najwyżej przeliczalny.

Dow. (dla funkcji niemalejącej) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Niech x_0 będzie punktem nieciągłości (I-go rodzaju). Z monotoniczności: $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. W przedziale $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ wybieramy liczbę wymierną $r(x_0)$. Postępując tak samo dla każdego punktu nieciągłości określamy funkcję r , która odwzorowuje zbiór punktów nieciągłości w zbiór liczb wymiernych. Z monotoniczności: funkcja r jest ściśle rosnąca, a więc różnowartościowa. Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej jest równoliczny z pewnym podzbiorem przeliczalnego zbioru liczb wymiernych, czyli jest co najwyżej przeliczalny.

Uzupełnienia

- Ciągłość funkcji wykładniczej.**

Należy pokazać, że $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. Z uwagi na równość $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}$ wystarczy pokazać ciągłość funkcji wykładniczej w punkcie 0, czyli $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1$. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji należy pokazać, że $\forall (x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$.

Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$ stąd

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall k \geq n_0 \quad 1 - \varepsilon \leq a^{\frac{1}{k}} \leq 1 + \varepsilon \quad \wedge \quad 1 - \varepsilon \leq a^{-\frac{1}{k}} \leq 1 + \varepsilon$$

Z faktu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ wynika, że $\forall k \exists m_0 \forall n \geq m_0 \quad \frac{-1}{k} \leq x_n \leq \frac{1}{k}$. Wobec tego $a^{-\frac{1}{k}} \leq a^{x_n} \leq a^{\frac{1}{k}}$,

gdy $a > 1$ i $a^{\frac{1}{k}} \leq a^{x_n} \leq a^{-\frac{1}{k}}$ gdy $a < 1$. Stąd biorąc $\tilde{n}_0 = \max\{n_0, m_0\}$ mamy

$$\forall \varepsilon \exists \tilde{n}_0 \forall n \geq \tilde{n}_0 \quad 1 - \varepsilon \leq a^{x_n} \leq 1 + \varepsilon, \text{ czyli } \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1.$$

- Ciągłość funkcji potęgowej.**

Należy pokazać, że $\forall x_0 \in D \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$. Z uwagi na równość $x^\alpha = x_0^\alpha \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$ wystarczy pokazać ciągłość funkcji potęgowej w punkcie 1, czyli $\lim_{x \rightarrow 1} x^\alpha = 1^\alpha = 1$. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji należy pokazać, że $\forall (x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = 1$.

Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $-k \leq \alpha \leq k$. Z tw. o arytmetyce granic wiadomo, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{-k} = 1. \text{ Wobec tego}$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad 1 - \varepsilon \leq x_n^k \leq 1 + \varepsilon \quad \wedge \quad 1 - \varepsilon \leq x_n^{-k} \leq 1 + \varepsilon.$$

Rozważając wszystkie warianty związane z monotonicznością funkcji potęgowej i położeniem x_n

względem 1, mamy nierówność $\min\{x_n^k, x_n^{-k}\} \leq x_n^\alpha \leq \max\{x_n^k, x_n^{-k}\}$, z której wynika, że

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad 1 - \varepsilon \leq x_n^\alpha \leq 1 + \varepsilon, \text{ czyli } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = 1, \text{ co dowodzi ciągłości funkcji potęgowej w punkcie 1.}$$

- Ciągłość funkcji sinus.**

Należy pokazać, że $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. Z tożsamości $\sin x - \sin x_0 = 2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}$,

ograniczoności funkcji cosinus i nierówności $|\sin x| \leq |x|$ mamy

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|, \text{ z której łatwo wynika ciągłość funkcji sinus.}$$

Podobnie dowodzi się ciągłości funkcji cosinus. Funkcje tangens i cotangens jako ilorazy funkcji ciągłych są ciągłe w swoich dziedzinach.