

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Niech $f: R \supset D \rightarrow R, x_0 \in D$.

Oznaczenia: $Ot(x_0, \delta) = K(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$; $S(x_0, \delta) = Ot(x_0, \delta) - \{x_0\}$

Def. **Ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie $x_0 \in D$ nazywamy wyrażenie $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$,
 $\Delta x \neq 0, x_0 + \Delta x \in Ot(x_0, \delta)$

Def. **Pochodną funkcji f w punkcie x_0** nazywamy właściwą granicę ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \stackrel{df}{=} f'(x_0) \quad (x_0 - \text{punkt skupienia zbioru } D)$$

W podobny sposób definiujemy pochodne jednostronne:

$$f'_-(x_0) = f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x_0) = f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tw. $f'(x_0)$ - istnieje $\Leftrightarrow$ istnieją $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ oraz są sobie równe.

Tw. **(o przedstawieniu przyrostu funkcji)**

Jeżeli funkcja $f: R \supset Ot(x_0, \delta) \rightarrow R$ ma pochodną w punkcie x_0 , to dla każdego $\Delta x \neq 0$, takiego, że $x_0 + \Delta x \in Ot(x_0, \delta)$ przyrost wartości funkcji można przedstawić w postaci

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + r(x_0, \Delta x), \text{ przy czym } r(x_0, \Delta x) = o(\Delta x), \text{ gdy } \Delta x \rightarrow 0.$$

Dow: Niech: $r(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x$. Stąd natychmiast mamy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + r(x_0, \Delta x) \text{ . Pozostaje jedynie pokazać, że } r(x_0, \Delta x) = o(\Delta x) \text{ gdy } \Delta x \rightarrow 0.$$

$$r(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x \quad / : \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = 0 \Rightarrow r(x_0, \Delta x) = o(\Delta x)$$

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 to funkcja ta jest ciągła w x_0 , bo

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + r(x_0, \Delta x).$$

Więc $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$, co oznacza ciągłość f w punkcie x_0 .

Def. Funkcję $f: R \supset Ot(x_0, \delta) \rightarrow R$ **nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0** , gdy istnieje stała $A \in R$ taka, że dla każdego $\Delta x \neq 0$, takiego, że $x_0 + \Delta x \in Ot(x_0, \delta)$,

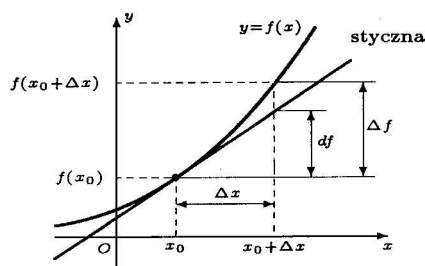
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + r(x_0, \Delta x), \text{ przy czym } r(x_0, \Delta x) = o(\Delta x), \text{ gdy } \Delta x \rightarrow 0.$$

Uwaga. Widać, że $A = f'(x_0)$

Def. **Różniczką funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx** nazywamy iloczyn $f'(x_0)\Delta x$, który

$$\text{oznaczamy } df(x_0, \Delta x) \stackrel{df}{=} f'(x_0)\Delta x$$

Uwaga. $df(x_0, \cdot): \Delta x \rightarrow df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ jest liniową funkcją przyrostu.



nachylenie siecznej

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

nachylenie stycznej

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ określa szybkość zmiany funkcji f w punkcie x_0 .

Z twierdzenia o przedstawieniu przyrostu funkcji i z przyjętych definicji otrzymujemy

Tw. Funkcja jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \Leftrightarrow$ funkcja ta ma pochodną w x_0 .

Inne oznaczenie dla pochodnej

$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \Delta x$ dla $f(x) = x$ $dx(x_0, \Delta x) = 1 \cdot \Delta x$. Stąd

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0, \Delta x)}{dx(x_0, \Delta x)} = \frac{df}{dx}$$

Funkcja pochodna i operator różniczkowania

Niech $f: R \supset I \rightarrow R$ (I – dowolny przedział) będzie różniczkowalna na I .

Def. Funkcję $f': I \ni x \rightarrow f'(x)$ nazywamy funkcją pochodną.

Operator (funkcja, odwzorowanie) $D = \frac{d}{dx}$, który funkcji f przypisuje $\frac{df}{dx} = f'(x)$ nazywamy operatorem różniczkowania.

Bezpośrednio z definicji wyprowadza się wzory

$f(x)$	$f'(x)$
$C = \text{const}$	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Np. $(x^\alpha)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} = x^{\alpha-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}.$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+\frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Tw. (o działaniach arytmetycznych). Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x (w I), to

$(f + g), (f - g), (f \cdot g), \left(\frac{f}{g}\right)$ są różniczkowalne w punkcie x (w I) oraz:

$$1^\circ (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$2^\circ (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$3^\circ (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$4^\circ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0 \quad (\forall_{x \in I} g(x) \neq 0)$$

Tw. (o pochodnej funkcji złożonej) Jeżeli:

1° f jest różniczkowalna w punkcie x (w przedziale I)

2° g jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$ (w przedziale $f(I)$)

to funkcja złożona $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x (w przedziale I) i

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Dow. $(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) \stackrel{\text{różn. } g}{=}$

$$= g'(f(x))(f(x + \Delta x) - f(x)) + r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x)) \stackrel{\text{różn. } f}{=}$$

$$= g'(f(x))(f'(x)\Delta x + r_2(x, \Delta x)) + r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x)) =$$

$$= g'(f(x))f'(x)\Delta x + g'(f(x))r_2(x, \Delta x) + r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x))$$

Trzeba pokazać, że $g'(f(x))r_2(x, \Delta x) + r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x)) = o(\Delta x)$

Jeżeli $\Delta x \rightarrow 0$ to $r_2 = o(\Delta x)$ stąd $g'(f(x))r_2(x, \Delta x) = o(\Delta x)$. Ponadto

$$r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x)) = \begin{cases} 0, & f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \\ r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x)) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x + \Delta x) - f(x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Stąd } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(f(x), f(x + \Delta x) - f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Tw. (o pochodnej funkcji odwrotnej). Niech $f: R \supset I \rightarrow R$ będzie funkcją

- ściśle monotoniczną,
- różniczkowalną w I
- $f'(x) \neq 0$ (w I)

Wówczas $g = f^{-1}$ jest różniczkowalna na $f[I]$ i $(f^{-1})'(f(x)) = g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Dow. Przy przyjętych oznaczeniach mamy: $f(x) = y$, $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$. Z uwagi na ciągłość i ściśle monotoniczność funkcji f funkcja odwrotna $g = f^{-1}$ jest również ciągła i ściśle monotoniczna. Stąd $\Delta y \neq 0$ gdy $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$ i $g(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

$$\text{Wobec tego } \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{(x + \Delta x) - x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Przechodząc do granic otrzymujemy tezę.

Uzupełnienie wzorów różniczkowania

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Twierdzenia o wartości średniej

Tw. Rolle'a:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ jest ciągła w } [a, b] \\ f \text{ jest różniczkowalna w } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists_{c \in (a, b)} : f'(c) = 0$$

Dowód. Jeżeli f jest stała to twierdzenie jest spełnione w sposób trywialny. Jeżeli f nie jest stała to prawdziwa jest przynajmniej jedna z nierówności $\inf_{x \in [a, b]} f(x) < f(a)$, $\sup_{x \in [a, b]} f(x) > f(a)$.

Przypuśćmy, że prawdziwa jest $\inf_{x \in [a, b]} f(x) < f(a)$ (dla $\sup_{x \in [a, b]} f(x) > f(a)$ - analogicznie).

Z tw. Wierstrassa $\exists_{c \in [a, b]} : f(c) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ale z warunku $\inf_{x \in [a, b]} f(x) < f(a)$ wynika, że $c \in (a, b)$.

Ale $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \begin{cases} \geq 0 & \text{gdy } \Delta x > 0 \\ \leq 0 & \text{gdy } \Delta x < 0 \end{cases}$ i istnieje $f'(c)$ bo c jest punktem wewnętrznym.

Granice jednostronne ilorazu różnicowego muszą być równe sobie, czyli równe zero.

A więc ostatecznie: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = 0$.

Tw. Cauchy'ego . Jeżeli

1. f i g są **ciągłe** w $[a, b]$,
2. f i g są **różniczkowalne** w (a, b) ,

to $\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$.

Dowód $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ spełnia zał. tw. Rolle'a , więc istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $\varphi'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$ - stąd teza.

Interpretacja tw. Cauchy'ego. Wektorowa funkcja $(f(t), g(t))$, $t \in [a, b]$ jest parametryzacją krzywej płaskiej. Istnieje punkt na krzywej w którym styczna do krzywej jest równoległa do siecznej przechodzącej przez końce krzywej

Z twierdzenia Cauchy'ego można wywnioskować

Tw. de L'Hospitala . (stosuje również się do granic jednostronnych i niewłaściwych) . Jeżeli

- 1° $\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ są określone w $S(x_0, \delta)$
 - 2° $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \right) \left[\frac{0}{0} \right]$ albo $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \right) \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$
 - 3° Istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)
- to istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Szkic dowodu: dla $\left[\frac{0}{0} \right]$. Przyjmując $f(x_0) = g(x_0) = 0$ mamy $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (z tw.

Cauchy'ego). Ale $x \rightarrow x_0 \Rightarrow c \rightarrow x_0$. Z istnienia granicy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ wynika istnienie granicy

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i równość tych granic.

Dla pozostałych przypadków wystarczy sprowadzić do formy $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Symbolne nieoznaczone : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

Przykłady

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= 1, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0, & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \frac{1}{2}, & \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= 1, & \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= e^{-1}, & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} &= 1. \end{aligned}$$

Przykład niewłaściwego użycia tw. de L'Hospitala

Wiadomo, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1$ ale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ nie istnieje (wyjaśnić sprzeczność!)

Tw. Lagrange’a: Jeżeli

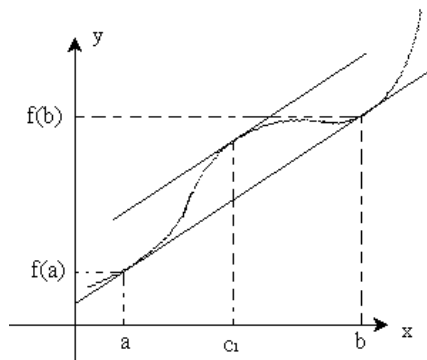
1. f jest **ciągła** w $[a, b]$,
2. f jest **różniczkowalna** w (a, b) ,

to $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$.

Dowód. Wystarczy rozpatrzeć funkcję $\varphi(t) = f(t) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a) \right)$, $t \in [a, b]$, która spełnia założenia twierdzenia Rolle’a. Stąd istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $\varphi'(c) = 0$. Stąd otrzymujemy $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, co implikuje tezę.

Interpretacja i wnioski

W interpretacji geometrycznej: musi istnieć punkt, w którym styczna ($f'(c)$ to współczynnik kierunkowy stycznej) jest równoległa do secznej ($\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ to współczynnik kierunkowy secznej).



Z tw. Lagrange’a:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x \quad c \in (\min\{x_0, x_0 + \Delta x\}, \max\{x_0, x_0 + \Delta x\})$$

- $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow f$ stała w (a, b)
- $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ rosnąca w (a, b)
- $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ malejąca w (a, b)

Dowód. $x_1 < x_2 \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad f'(c) > 0$ zawsze (bo taki przypadek rozpatrujemy), $x_2 - x_1 > 0$ z założenia, a więc $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli f rosnąca.

Ekstrema funkcji

Niech funkcja $f: Ot(x_0, \delta_0) \ni x \rightarrow f(x)$ będzie określona na pewnym otoczeniu punktu x_0

Def. Funkcja f ma w punkcie x_0

maksimum lokalne właściwe jeżeli $\exists S(x_0, \delta) : \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) < f(x_0)$

minimum lokalne właściwe jeżeli $\exists S(x_0, \delta) : \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) > f(x_0)$

maksimum lokalne jeżeli $\exists S(x_0, \delta) : \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$

minimum lokalne jeżeli $\exists S(x_0, \delta) : \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$

WK istnienia ekstremum (tw. Fermata). Jeżeli funkcja $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ni x \rightarrow f(x)$

- ma w punkcie x_0 ekstremum
- jest różniczkowalna w x_0

to $f'(x_0) = 0$

Dow. (dla minimum) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & \text{dla } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{dla } x < x_0 \end{cases}$ ale granica istnieje i jest ona tylko jedna, czyli jedyna możliwa to 0.

Uwaga. Funkcja może mieć ekstremum jedynie w punktach, w których pochodna zeruje się lub nie istnieje.

I WW istnienia ekstremum. Jeżeli

- f jest ciągła w punkcie x_0
- f jest różniczkowalna w $S(x_0, \delta)$
- $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ [$f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$]
- $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ [$f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$]

to f ma w punkcie x_0 minimum [maksimum] lokalne właściwe.

Dowód. (dla minimum). Niech $x \in S(x_0, \delta)$. Z tw. Lagrange'a $\forall x \in S(x_0, \delta)$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) > 0$, $\theta \in (0, 1)$ (bo $f'(x_0 + \theta(x - x_0))$ i $(x - x_0)$ są tego samego znaku).

Twierdzenie i wzór Taylora - uogólnienie twierdzenia Lagrange'a

Niech I oznacza przedział domknięty o końcach x_0 i x tzn. $I = [\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\}]$

Tw. Taylora. Jeżeli $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

- ma ciągłe pochodne do rzędu $n-1$ w I
- ma pochodną rzędu n we wnętrzu I (int I)

to $\exists c \in \text{int } I$ takie, że

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}_{P_{n-1}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n}_{r_n(x)}$$

Dow. Rozważmy funkcję pomocniczą $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $\varphi(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M(t - x_0)^n$.

Dobieramy tak M , żeby $\varphi(x) = 0$, czyli $M = \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_0)^n}$. Widać, że także $\varphi(x_0) = 0$.

Funkcja φ spełnia na przedziale I założenia twierdzenia Rolle'a, czyli $\exists c_1 \in \text{int } I : \varphi'(c_1) = 0$.

Funkcja φ' spełnia na przedziale $I_1 = [\min\{x_0, c_1\}, \max\{x_0, c_1\}]$ założenia twierdzenia Rolle'a, czyli $\exists c_2 \in \text{int } I_1 : \varphi''(c_2) = 0$. Powtarzamy rozumowanie n razy: $\exists c_n \in \text{int } I_{n-1} : \varphi^{(n)}(c_n) = 0$.

Oznaczając $c = c_n \in \text{int } I$ mamy $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - Mn!$ i $\varphi^{(n)}(c) = 0 \Rightarrow M = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Otrzymaliśmy więc dwa wzory na M . Porównując $\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ stąd teza.

Zapis różniczkowy wzoru Taylora

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, x - x_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{(n-1)} f(x_0, x - x_0) + \frac{1}{n!} d^{(n)} f(c, x - x_0).$$

Przykład. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \ln x$ przyjmując $x_0=1$ i $n=3$.

$$\ln x = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-1)^3.$$

Uwaga. Dla $x_0=0$ wzór Taylora nosi nazwę wzoru Maclaurina.

C_I^n - zbiór funkcji $f: R \supset I \rightarrow R$ n -krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na przedziale I .

$$f \in C_I^n \Leftrightarrow n\text{-ta pochodna } f^{(n)} \text{ jest ciągła na } I.$$

$$C_I^0 - \text{zbiór funkcji ciągłych na przedziale } I. \quad C_I^0 \supset C_I^1 \supset \dots \supset C_I^n$$

Tw: (II warunek wystarczający istnienia ekstremum)

$$\left. \begin{array}{l} f \in C_{O_I(x_0, \delta)}^{2n} \\ f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ dla } k = 1, 2, \dots, 2n-1 \\ f^{(2n)}(x_0) > 0 \text{ } (< 0) \end{array} \right\} \Leftrightarrow f \text{ ma w p. } x_0 \text{ minimum (maksimum) lokalne właściwe.}$$

Dow: (dla minimum) z wzoru Taylora: $f(x) - f(x_0) = 0 + 0 + \dots + \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}$

Z tw. o lokalnym zachowaniu znaku $f^{(2n)}(c) > 0$ oraz $\forall_{x \neq x_0} (x - x_0)^{2n} > 0$, czyli $f(x) - f(x_0) > 0$, co oznacza, że f ma w p. x_0 minimum lokalne właściwe.

Dla maksimum analogicznie ($f^{(2n)}(c) < 0$).

Ekstrema globalne $f: R \supset D_f \rightarrow R$

Def: Funkcja f ma w $x_0 \in D_f$ minimum globalne właściwe $\Leftrightarrow \forall_{\substack{x \in D_f \\ x \neq x_0}} f(x) > f(x_0)$.

Funkcja f ma w $x_0 \in D_f$ minimum globalne $\Leftrightarrow \forall_{\substack{x \in D_f \\ x \neq x_0}} f(x) \geq f(x_0)$.

Funkcja f ma w $x_0 \in D_f$ maksimum globalne właściwe $\Leftrightarrow \forall_{\substack{x \in D_f \\ x \neq x_0}} f(x) < f(x_0)$.

Funkcja f ma w $x_0 \in D_f$ maksimum globalne $\Leftrightarrow \forall_{\substack{x \in D_f \\ x \neq x_0}} f(x) \leq f(x_0)$.

Algorytm szukania ekstremów globalnych funkcji f na zbiorze domkniętym i ograniczonym (a więc zwartym).

- 1° Szukamy punktów krytycznych we wnętrzu D ($f'(x_0) = 0 \vee f'$ -nie istnieje),
- 2° Sprawdzamy wartości funkcji na brzegu D ,
- 3° Obliczamy wartości funkcji w tych punktach i porównujemy je.

Asymptoty

Def. Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$

Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$

Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \wedge$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ (mogą być różne).

Def. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

Powyższe definicje można uogólnić.

Def. Funkcja $g(x)$ jest asymptotą prawostronną funkcji $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Tw. Jeżeli prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji f , to

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax), \quad a, b - \text{granice skończone.}$$

Dowód. bezpośrednio z definicji - jako ćwiczenie.

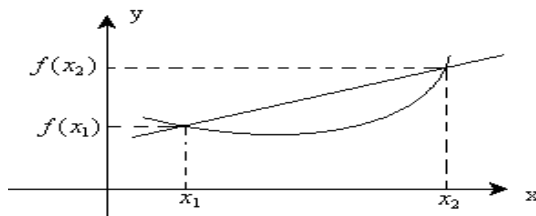
Wypukłość funkcji $f : R \supset I \rightarrow R$, I – przedział

Def. Funkcję $f : I \rightarrow R$ nazywamy **wypukłą** w I gdy

$$(*) \quad \forall_{x_1, x_2 \in I} \forall_{t \in [0,1]} f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (\text{wykres jest poniżej siecznej})$$

Jeżeli $(*)$ zastąpimy warunkiem

$$(*)' \quad \forall_{x_1, x_2 \in I} \forall_{t \in (0,1)} f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \text{ to } f \text{ nazywamy } \textbf{\textit{ściśle wypukła}} \text{ w } I$$



Inaczej

$$(**) \quad \forall_{x_1, x_2 \in I} \forall_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1}} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Jeszcze inaczej

$$(***) \quad \forall_{x_0 \in I} \exists_{a \in R} \forall_{x \in I} : f(x) \geq a(x - x_0) + f(x_0) \quad (\text{w każdym punkcie istnieje prosta podpierająca})$$

Def. Funkcja $f : I \rightarrow R$ jest **wklęsła** $\Leftrightarrow$ funkcja $(-f)$ jest wypukła.

$$\text{Tw.} \quad \left. \begin{array}{l} f \in C_I^2 \\ \forall_{x \in I} f'' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f - \text{wypukła.} \qquad \left. \begin{array}{l} f \in C_I^2 \\ \forall_{x \in I} f'' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f - \text{wklęsła}$$

Dowód. Natychmiastowy z wzoru Taylora

Punkt przegięcia

Def. Punkt $P(x_0, f(x_0))$ nazywamy **punktem przegięcia funkcji** $y = f(x)$ jeżeli funkcja f jest

- różniczkowalna w punkcie x_0 (ma styczną w punkcie $P(x_0, f(x_0))$)
- wypukła w pewnym lewostronnym sąsiedztwie x_0
- wklęsła w prawostronnym

lub na odwrót.

Interpretacja. W punkcie przegięcia wykres funkcji przechodzi z jednej strony stycznej na drugą

Tw. $(f \in C_I^2 \wedge f \text{ ma w punkcie } x_0 \in I \text{ punkt przegięcia}) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Punktów przegięcia szukamy więc wśród punktów, w których druga pochodna znika lub nie istnieje