

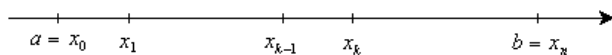
CAŁKA (OZNACZONA) RIEMANNA

Oznaczenia: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja rzeczywista określona na przedziale domkniętym

Weźmy ciąg $a = x_0 < x_1 < \dots < b = x_n$

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów.

$d(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ - średnica przedziału



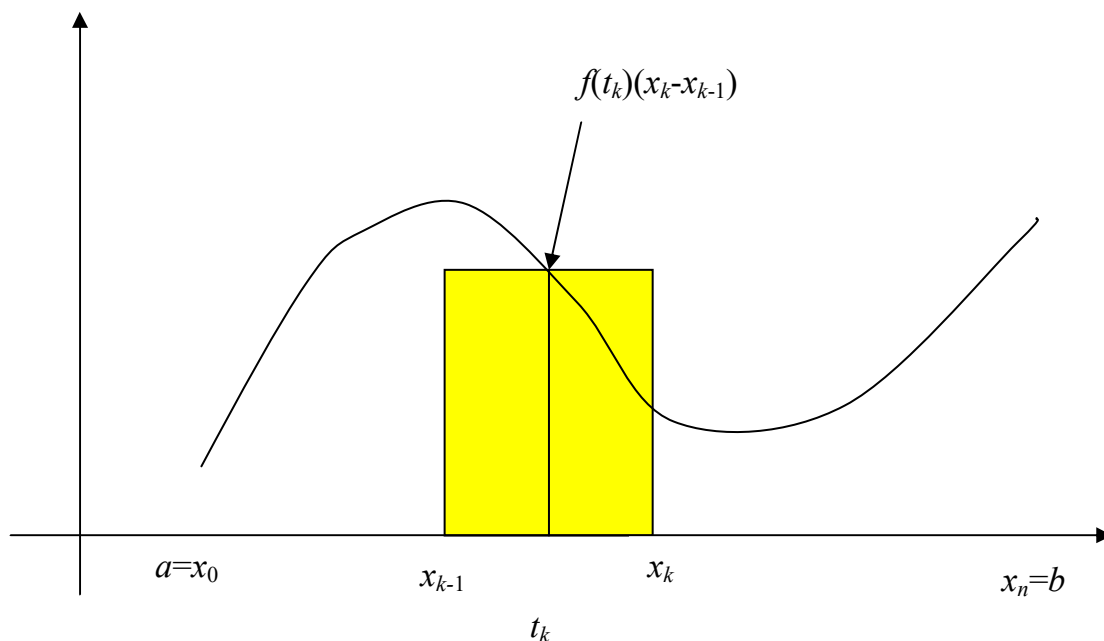
Wybieramy w każdym podprzedziale punkt pośredni $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$; $k = 1, 2, \dots, n$

Określony jest więc ciąg $\{t_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ - ciąg punktów pośrednich

Tworzymy sumę

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

Interpretacja σ dla nieujemnej funkcji f



Def. Liczbę rzeczywistą I nazywamy całką Riemanna (całką oznaczoną) funkcji f na przedziale $[a, b]$

jeżeli $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathcal{P} \forall \{t_k\}_{k=1,2,\dots,n} d(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathcal{P}, \{t_k\}) - I| < \varepsilon$.

Funkcję f dla której istnieje całka Riemanna na przedziale $[a, b]$ nazywamy całkowaną w sensie Riemanna.

Oznaczenia: $I = \int_a^b f(x) dx$, gdzie a - dolna granica, b - górna granica, f - funkcja podcałkowa

$\mathcal{R}[a, b]$ - zbiór funkcji całkowanych w sensie Riemanna na $[a, b]$

Powyższy warunek definicyjny przypomina ε - δ definicję granicy w sensie Cauchy’ego, którą mniej

formalnie zapisujemy $I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$. Ponieważ definicji granicy w sensie

Cauchy’ego odpowiada równoważna ciągowa definicja w sensie Heinego możemy podać równoważną ciągową definicję całki.

Widać, że $d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa (kontrprzykład)

Def. Ciąg przedziałów nazywamy normalnym jeżeli $n \rightarrow \infty \Rightarrow d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$.

Def. (według Heine’go) Liczbę $I \in \mathbb{R}$ nazywamy całką Riemanna (oznaczoną) funkcji f na przedziale $[a, b]$ jeżeli dla każdego normalnego ciągu przedziałów odpowiadający ciąg sum całkowych $\sigma_n(f, \mathcal{P}_n, \{\xi_k^n\})$ jest zbieżny do liczby I niezależnie od wyboru punktów pośrednich $\{\xi_k^n\}$.

Przykład funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna:

Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest całkowalna na $[0, 1]$.

Uwaga. Obliczanie całek z definicji jest zadaniem trudnym. Nie wiemy nawet kiedy całka istnieje.

Potrzebujemy więc pewnych warunków koniecznych i wystarczających na istnienie całki.

Szczególnie kłopotliwy jest warunek niezależności granicy od wyboru punktów pośrednich..

Wprowadzimy więc pewne skrajne sumy szacujące od dołu i od góry sumy pośrednie

Sumy Darboux – całka górna i dolna

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f – ograniczona,

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów.

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) ; M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) ; m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) ; M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

Z uwagi na ograniczoność f powyższe kresy są skończone.

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) - \text{dolna suma Darboux}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \text{górną sumą Darboux}$$

$\forall \mathcal{P} \quad m(b-a) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a)$ – obie sumy Darboux są ograniczone.

Ponieważ przy zagęszczaniu podziału suma dolna nie może maleć a suma górna nie może rosnąć

można pokazać, że dla dowolnych podziałów $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ $s(f, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_2)$. Rzeczywiście, biorąc

podział $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ będący zagęszczeniem obu podziałów mamy

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_3) \leq S(f, \mathcal{P}_3) \leq S(f, \mathcal{P}_2)$$

czyli istnieją kresy:

$$\underline{I} = \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) \text{ - dolna całka Darboux}$$

$$\bar{I} = \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}) \text{ - górna całka Darboux}$$

Dla funkcji ograniczonej obie całki zawsze istnieją.

Z powyższych rozważań wynika, że :

Tw. Warunkiem koniecznym całkowalności w sensie Riemanna funkcji f jest jej ograniczoność

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \text{ - ogr. na } [a, b].$$

Rzeczywiście dla danego podziału $\mathcal{P}$ $m(b-a) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq \sigma(f, \mathcal{P}, \{t_k\}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a)$

$$s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\{t_k\}} \sigma(f, \mathcal{P}, \{t_k\}) \quad S(f, \mathcal{P}) = \sup_{\{t_k\}} \sigma(f, \mathcal{P}, \{t_k\})$$

Ponieważ przez odpowiedni wybór punktów pośrednich można sumę $\sigma(f, \mathcal{P}, \{t_k\})$ uczynić dowolnie bliską sumy dolnej $s(f, \mathcal{P})$ lub górnej $S(f, \mathcal{P})$, które są skończone jedynie wówczas, gdy funkcja jest ograniczona na przedziale $[a, b]$. Ponadto

Tw. Warunkiem koniecznym i wystarczającym całkowalności funkcji f w sensie Riemanna jest z równość całek górnej i dolnej.

Inaczej $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\mathcal{P}} : S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$

Tw. Funkcja f ciągła na $[a, b]$ jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dow. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest jednostajnie ciągła, więc $\forall \varepsilon \exists \delta$
 $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Stąd, dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ o średnicy mniejszej

$$\text{niż } \delta \text{ otrzymujemy } S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Podobnie można udowodnić

Tw. Funkcja monotoniczna na $[a, b]$ jest R-całkowalna na $[a, b]$.

Dow. (dla funkcji niemalejącej) Rozważmy podział równomierny $P = \{x_i = a + \frac{b-a}{n} i, i = 0, \dots, n\}$
 Wówczas $M_k \geq f(x_k)$, $m_k \leq f(x_{k-1})$, $i = 1, \dots, n$. Wobec tego

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = (b-a) \frac{f(b) - f(a)}{n} \leq \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych n .

Tw. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (więc $m \leq f \leq M$), $g: [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła $\Rightarrow g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dowód Rudin str 109.

Charakteryzacja funkcji całkowlanej w sensie Riemanna

Def. Rodzinę przedziałów $\{(a_k, b_k)\}_{k=1,2,\dots}$ nazywamy pokryciem zbioru $A \Leftrightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$.

Def. Długością pokrycia nazywamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (b_n - a_n)$ (o ile istnieje!).

Def. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest miary (L) zero, jeżeli $\forall_{\varepsilon > 0}$ istnieje pokrycie tego zbioru o długości nie przekraczającej ε .

Przykład. Dowolny zbiór przeliczalny $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ ma miarę (L) równą 0. Pokryciem jest rodzina

przedziałów $(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})$, $i=1,2,\dots$ o długości $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon$

Tw. Funkcja f ograniczona na $[a,b]$ jest całkowlana w sensie Riemanna (tzn. $f \in \mathcal{R}[a,b]$) $\Leftrightarrow$ zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miarę zero.

Przykład. Funkcja Riemanna $f_R(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ \frac{1}{q}; & x = \frac{p}{q}, \text{ ułamek nieskracalny} \\ 0; & x \neq \frac{p}{q} \end{cases}$, mająca punkty nieciągłości w

punktach wymiernych przedziału $[0,1]$ jest całkowlana w sensie Riemanna. (zob Dodatek na końcu wykładu)

Własności funkcji R-całkowlanych

Tw. Niech $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\text{a) } f+g \in \mathcal{R}[a,b] \text{ i } \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{b) } \alpha f \in \mathcal{R}[a,b] \text{ i } \int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{c) } f \leq g \text{ na } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{d) } a < c < b \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a,c] \text{ i } f \in \mathcal{R}[c,b] \text{ oraz } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx)$$

$$\text{e) } fg \in \mathcal{R}[a,b]$$

$$\text{f) } |f| \in \mathcal{R}[a,b] \text{ i } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Punkty a-d są prostymi konsekwencjami definicji całki i własności granic. Ponadto jeżeli $f \in \mathcal{R}[a,b]$, to $m \leq f(x) \leq M$ na przedziale $[a,b]$ a z punktu (c) otrzymujemy

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ad e) $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$ (bo $g(t)=t^2$ jest funkcją ciągłą a f całkowalną) a
 $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$

Ad f) $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a, b]$ (bo $g(t)=|t|$ jest funkcją ciągłą a f całkowalną). Ponadto $-|f| \leq f \leq |f|$,

więc z c i b $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$, co jest równoważne $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Rozszerzenie znaczenia symbolu całki Riemanna

Z definicji całki Riemanna widać, że istotną rolę odgrywa uporządkowanie prostej R (przy tworzeniu podziału $\mathcal{P}$). Jeżeli zmienimy uporządkowanie prostej, to sumy całkowite zmieniają znak, bo zmieniają znak różnice $x_k - x_{k-1}$. Przyjmijmy więc dla $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Stąd w szczególności $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Całkowanie a różniczkowanie

Tw. Niech $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i niech $a \leq x \leq b$. Wówczas

a) funkcja $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest ciągła na $[a, b]$.

b) jeśli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to F jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dow. a) Niech $x \in [a, b]$. Wybieramy dowolne h takie, że $x+h \in [a, b]$

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \quad (*)$$

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \text{ jest ograniczona na } [a, b] \Leftrightarrow \exists_M \forall_{t \in [a, b]} |f(t)| \leq M \quad (**)$$

$$Z (*) \text{ i } (**) \quad |F(x+h) - F(x)| \leq \int_{\min\{x, x+h\}}^{\max\{x, x+h\}} |f(t)| dt \leq M |h| \Rightarrow \text{ciągłość}$$

Dow. b) Niech $x_0 \in [a, b]$ - punkt ciągłości funkcji f . Wybieramy dowolne h takie, że $x_0+h \in [a, b]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_{\min\{x_0, x_0+h\}}^{\max\{x_0, x_0+h\}} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \end{aligned}$$

f jest ciągła w punkcie $x_0 \Rightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{t \in [a, b]} |t - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Stąd

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon, \text{ co implikuje}$$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Wniosek. Jeżeli $f \in C[a, b]$, to $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na $[a, b]$ i $F(a) = 0$.

Tw. (Newtona-Leibniza) Jeżeli $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i istnieje funkcja F różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$\forall_{x \in [a, b]} F'(x) = f(x), \text{ to } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dow. Dla podziału $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ wybieramy punkty pośrednie $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tak, aby $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ (z tw. Lagrange'a dla F wynika, że jest to możliwe). Wówczas

$$\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a)$$

(wszystkie wyrazy sumy z wyjątkiem $F(a)$ i $F(b)$ ulegną redukcji).

Wobec założonej całkowalności f , jeżeli $d\mathcal{P} \rightarrow 0$, to $\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$.

Stąd
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tw. (całkowe o wartości średniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, $\Rightarrow \exists c \in (a, b): \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

Dow. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na $[a, b]$. Wobec tego $F(x)$ - różniczkowalna

na $[a, b]$, czyli również ciągła na $[a, b]$, czyli F spełnia zał. tw. Lagrange'a, więc $\exists c \in (a, b): F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$.

Jeżeli $f \in \mathcal{R}[a, b]$ to liczbę $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$ nazywamy wartością średnią funkcji f na przedziale $[a, b]$.
Jeżeli f jest ciągła, to $\exists c \in (a, b) : \mu = f(c)$

Tw. (o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej)

Jeżeli

- f i g są różniczkowalne na $[a, b]$,
- $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$

$$\text{to } \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \{f(b)g(b) - f(a)g(a)\} - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Dowód. Łatwo zauważyć, że funkcje $f'g'$ i $f'g \in \mathcal{R}[a, b]$. Ze wzoru $(fg)' = fg' + f'g$ i tw. Newtona -

$$\text{Leibniza mamy } \int_a^b (f'g + fg')dx = f(b)g(b) - f(a)g(a), \text{ stąd teza.}$$

Tw. (o całkowaniu przez podstawienie całki oznaczonej)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in C_{[\alpha, \beta]}^1 \\ \text{a) } \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \\ f \text{ jest cg. na } \{x : x = \varphi(t) \ t \in [\alpha, \beta]\} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\left. \begin{array}{l} h \in C^1_{[a,b]} \\ b) \quad h(a) = A, \quad h(b) = B \\ g \text{ jest cg. na } \{y : y = h(x) \quad x \in [a, b]\} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b g(h(x))h'(x)dx = \int_A^B g(y)dy$$

Dow. (a). Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na $\{x : x = \varphi(t) \quad t \in [\alpha, \beta]\}$. Wówczas $F(\varphi(t))$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$. (z tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej). Stąd

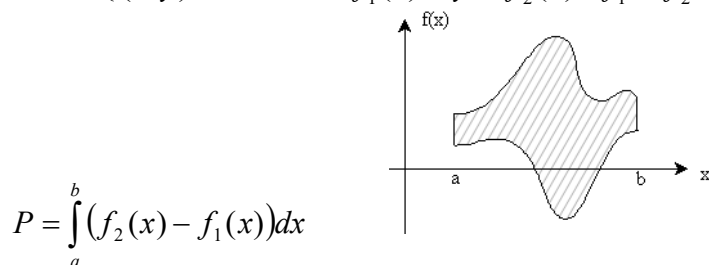
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Zastosowanie całki Riemanna

Zastosowania geometryczne całek

I. Pole trapezu krzywoliniowego

$\{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), f_1 \leq f_2 \text{ na } [a, b], f_1, f_2 \text{ - ciągłe na } [a, b]\}$



II. Długość łuku krzywej

Niech $\vec{r} : t \in [\alpha, \beta] \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in R^3$ będzie funkcją wektorową określoną na $[\alpha, \beta]$.

W daną krzywą wpisujemy łamaną i bierzemy kres górny długości łamanych. Jeżeli będzie on skończony, to krzywą nazywamy **prostowalną**.

Tw. Jeżeli $\vec{r} \in C^1_{[\alpha, \beta]}$ to krzywa $K : \{\vec{r}(t) \quad t \in [\alpha, \beta]\}$ jest prostowalna (ma długość) i

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

Szkic dowodu.

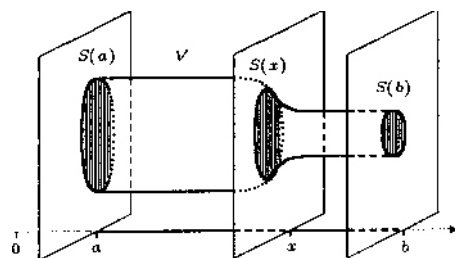
$$\begin{aligned} \text{Długość łamanej} &= \sum_{k=1}^n |\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} = \\ &= \{3 \text{ razy tw. Lagrange'a}\} = \sum_{k=1}^n \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2 + [z'(\psi_k)]^2} (t_k - t_{k-1}) = \{\text{przejście graniczne}\} \Rightarrow \end{aligned}$$

teza.

Przypadek szczególny : Jeżeli $K = \{(x, f(x)) : x \in [a, b], f \in C^1_{[a, b]}\}$, to $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

III. Objętość bryły

Niech $S(x)$, $a \leq x \leq b$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie x i niech funkcja $S(x)$ będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$.



Wtedy
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

W szczególności dla bryły obrotowej:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

IV. Pole powierzchni bryły obrotowej

Pole powierzchni bryły obrotowej aproksymujemy sumą pól powierzchni stożków ściętych zakreślonych przez łamaną wpisaną w daną krzywą.

$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Zastosowania fizyczne całek

V. Droga przebyta w ruchu zmiennym

Niech punkt materialny porusza się po płaszczyźnie lub w przestrzeni ze zmienną prędkością

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)). \text{ Oznaczmy } v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}.$$

Droga przebyta przez punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \text{ a przemieszczenie } \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt, \int_{t_1}^{t_2} v_y(t) dt, \int_{t_1}^{t_2} v_z(t) dt \right]$$

VI. Praca wykonana przez zmienną siłę działającą wzdłuż prostej

Założmy, że równoległe do osi OX działa zmienna siła $F(x) = |\vec{F}(x)|$.

Praca wykonana przez tę siłę od punktu $x=a$ do punktu $x=b$ wyraża się wzorem

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

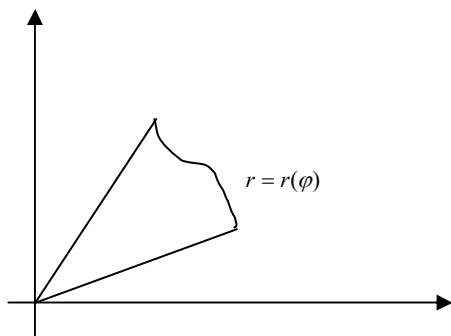
VII. Masa odcinka materialnego

Założmy że odcinek $[a, b]$ obdarzony jest masą o gęstości liniowej $\rho(x)$. Wówczas jego masa wyraża się wzorem

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Przykłady

Pole obszaru zadanego w układzie biegunowym $r \leq r(\varphi); \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.



Dzieląc przedział $[\varphi_1, \varphi_2]$ na n równych części i przybliżając pola otrzymanych kawałków polami wycinków

kołowych uzyskujemy wzór $P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi$.

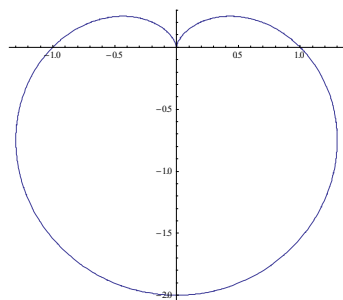
Długość krzywej danej równaniem biegunowym $r = r(\varphi); \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ wyliczymy przedstawiając tę krzywą w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos t \\ y(t) = r(t) \sin t \end{cases}; t \in [\varphi_1, \varphi_2]. \text{ Stąd wyliczymy } \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{[r'(t)]^2 + [r(t)]^2}.$$

Wobec tego $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r'(t)]^2 + [r(t)]^2} dt$

Przykłady

- Oblicz pole powierzchni i obwód figury ograniczonej krzywą zadaną biegunowo $r(\varphi) = 1 - \sin \varphi$. Narysuj tę krzywą w układzie współrzędnych x, y .



$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \sin \varphi)} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2})} d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2})^2} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2}| d\varphi = \left\{ t = \frac{\varphi}{2} \right\} = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} |\sin t - \cos t| dt = 2\sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin t - \cos t) dt \right] = \\ &= 2\sqrt{2} [(\sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\sin t + \cos t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}] = 2\sqrt{2} [(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1)] = 8 \end{aligned}$$

- Całkę Riemanna można wykorzystać do obliczania pewnych granic dostrzegając w pewnych wyrażeniach sumy całkowite. Aby obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2}$, przekształcimy ją najpierw do postaci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right] \frac{1}{n} &= \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2} \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \text{ (całka przedstawia pole I ćwiartki koła } x^2 + y^2 \leq 1 \text{)}.$$

3. Obliczyć długość krzywej zadanej równaniem biegunowym $r(\varphi) = \varphi^4$, $\varphi \in [0, 3]$.

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r'(t)]^2 + [r(t)]^2} dt \text{ W rozważanym przypadku}$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{[4t^3]^2 + [t^4]^2} dt = \int_0^3 t^3 \sqrt{16 + t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 16 + t^2 \\ du = 2t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_{16}^{25} (u-16) \sqrt{u} du =$$

$$\frac{1}{2} \int_{16}^{25} (u^{\frac{3}{2}} - 16u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{1423}{15} \approx 94.9$$

Funkcja Riemanna $f_R(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ \frac{1}{q}; & x = \frac{p}{q}, \text{ ułamek nieskracalny} \\ 0; & x \neq \frac{p}{q} \end{cases}$

Pokażemy że $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} f_R(x) = 0$. Oznacza to, że zbiór liczb wymiernych Q jest zbiorem punktów nieciągłości funkcji Riemanna.

Weźmy dowolny punkt x_0 i dowolne $\varepsilon > 0$. Widać że

- istnieje skończona ilość liczb naturalnych q takich, że $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ ($\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \geq q$)
- w przedziale $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ jest skończona ilość liczb $\frac{p}{q}$ takich, że $f_R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$.

Rzeczywiście, dla ustalonego q mamy przeliczalnie wiele liczb postaci $\frac{p}{q}$, odległych od siebie o wielokrotności $\frac{1}{q}$. W każdym ograniczonym przedziale jest skończona ilość tych liczb, a suma skończonej ilości zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym.

- istnieje δ takie że, w $S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ nie ma liczb $\frac{p}{q}$ takich, że

$$f_R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon, \text{ czyli } \forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in S(x_0, \delta) f_R(x) < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_R(x) = 0.$$

Wniosek: Funkcja Riemanna jest nieciągła na zbiorze liczb wymiernych Q i ciągła na zbiorze liczb niewymiernych $R-Q$. Ponieważ zbiór punktów nieciągłości jako przeliczalny ma miarę Lebesgue'a równą 0, to funkcja Riemanna jest całkowalna w sensie Riemanna dowolnym przedziale domkniętym (więc ograniczonym).

Dowód całkowalności funkcji Riemanna. Niech $[a, b]$ będzie dowolnym przedziałem. Zauważmy, że

- $\forall n \in N$ istnieje w przedziale $[a, b]$ skończona ilość k_n liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, takich, że $q \leq n$.

- dla każdego podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$ o średnicy δ jest co najwyżej $2k_n$ podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ zawierających liczby tej postaci (jedna liczba może należeć do co najwyżej 2 przedziałów domkniętych- stąd $2k_n$)
- dla pozostałych przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ mamy $M_i - m_i < \frac{1}{n}$, gdzie $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_R(x)$,
 $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_R(x)$.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Niech $n > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$. Dobierając średnicę podziału $\delta < \frac{\varepsilon}{4k_n}$ mamy:

$$S(f_R, \mathcal{P}) - s(f_R, \mathcal{P}) \leq 2k_n \delta + \frac{b-a}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reasumując $\forall \varepsilon \exists \mathcal{P} : S(f_R, \mathcal{P}) - s(f_R, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$, co oznacza całkowalność funkcji Riemanna.

Oczywiście $\int_a^b f_R(x) dx = \lim_{d\mathcal{P} \rightarrow 0} s(f_R, \mathcal{P}) = 0$.