

SZEREGI

Niech (a_n) będzie ciągiem rzeczywistym lub zespolonym ($a : n \in N \rightarrow a(n) = a_n \in R \text{ lub } C$)

Tworzymy ciąg (S_n) „sum częściowych” ciągu (a_n) zdefiniowany wzorem $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Def. Ciąg sum częściowych (S_n) nazywamy szeregiem generowanym przez ciąg (a_n) i oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny, to jego granicę $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ oznaczamy również

symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i nazywamy sumą szeregu.

Widać że pojęcie szeregu można rozszerzyć zastępując liczby obiektami, które umiemy dodawać i mnożyć przez skalary. Rozważać będziemy więc ciągi (a_n) o wartościach w przestrzeni wektorowej X . Aby w przestrzeni wektorowej wprowadzić pojęcie granicy ciągu wygodnie jest użyć normy, która jest abstrakcyjnym uogólnieniem pojęcia długości wektora.

Niech X będzie **przestrzeń liniową** (wektorową) nad ciałem K ($K = R$)

Def. Normą w przestrzeni liniowej nad ciałem K (C lub R) nazywamy rzeczywistą funkcję

$$\|\cdot\| : x \in X \rightarrow \|x\| \geq 0, \text{ przy czym:}$$

$$1^\circ \quad \forall_{x \in X} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

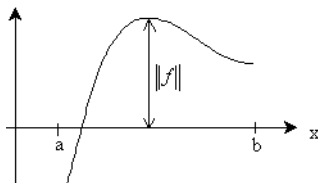
$$2^\circ \quad \forall_{\alpha \in K} \forall_{x \in X} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$3^\circ \quad \forall_{x, y \in X} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Np. $X = C_{[a,b]}$ - zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych **ciągłych** na $[a, b]$

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{- norma supremum (sup=max bo } f \text{ jest cg. na przedziale } [a,b])$$



Rozważmy ciąg (a_n) w przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ $a : n \in N \rightarrow a(n) = a_n \in X$

Tworzymy ciąg (S_n) „sum częściowych” ciągu (a_n) zdefiniowany wzorem $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Def. Ciąg sum częściowych (S_n) nazywamy szeregiem generowanym przez ciąg (a_n) i oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny, to jego granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ oznaczamy również symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ i nazywamy sumą szeregu.}$$

Tw. (warunek konieczny zbieżności szeregu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \vec{0} \text{ (wektor zerowy w przestrzeni } (X, \|\cdot\|))$$

Dow. $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = s \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = s - s = 0$$

Z własności granic i definicji szeregu mamy

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżne są szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\forall_{\lambda \in K}$ (K - ciało skalarów) zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jeżeli przestrzeń unormowana jest zupełna, czyli jest przestrzenią Banacha, to zbieżność jest równoważna spełnieniu warunku Cauchy'ego.

Tw. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ elementów przestrzeni Banacha X jest zbieżny $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_N \forall_{m, n} \quad m > n > N \Rightarrow \|S_m - S_n\| = \|a_{n+1} + \dots + a_m\| \leq \varepsilon$$

Szeregi liczbowe o wyrazach nieujemnych

Jeżeli $\forall n \ a_n \geq 0$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, to ciąg sum częściowych (S_n) jest niemalejący, a wobec tego jest zbieżny $\Leftrightarrow$ jest ograniczony.

Tw. (I kryterium porównawcze)

- $\forall_{n \geq n_0} \quad 0 < a_n \leq b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny
- $\forall_{n \geq n_0} \quad 0 < a_n \leq b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - rozbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - rozbieżny

Dowód. (część 1) $\forall n \ S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k < \infty$, czyli S_n jest ograniczony, więc (jako monotoniczny) zbieżny.

Tw. (II kryterium porównawcze) Jeżeli istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K \ (0 \leq K \leq \infty)$, to

- $K = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny
- $K = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - rozbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - rozbieżny
- $0 < K < \infty \Rightarrow$ oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Dowód. Dla $K=0$ $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq (K + \varepsilon)b_n$,
 dla $K=\infty$ $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad 0 < (K - \varepsilon)b_n \leq a_n$,
 dla $0 < K < \infty$ $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad 0 < (K - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (K + \varepsilon)b_n$

Stąd z I kryterium porównawczego otrzymujemy tezę.

Tw. (kryterium całkowe) Jeżeli funkcja f jest dodatnia i malejąca w $[1, \infty)$ oraz $a_n = f(n)$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest zbieżna i } \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$

Dowód. Rysunek $\Rightarrow S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$

Jeżeli $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to ciąg sum częściowych $S_n \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$ jest ograniczony więc (jako monotoniczny) jest zbieżny.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\forall n \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ czyli całka (z funkcji nieujemnej) jest ograniczona więc zbieżna.

Jako wniosek Przechodząc do granicy z n w nierówności $S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$ mamy

$$S - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq S, \text{ czyli } 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \int_1^{\infty} f(x)dx \leq a_1$$

Wniosek. Szereg Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest $\begin{cases} \text{zbieżny dla } \alpha > 1 \\ \text{rozbieżny dla } \alpha \leq 1 \end{cases}$,

bo całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ jest $\begin{cases} \text{zbieżna dla } \alpha > 1 \\ \text{rozbieżna dla } \alpha \leq 1 \end{cases}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest (bardzo wolno) rozbieżny ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$! (wobec tego warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest więc warunkiem wystarczającym zbieżności szeregu).

Szereg geometryczny o ilorazie q : $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{zbieżny, gdy } |q| < 1 \\ \text{rozbieżny, gdy } |q| \geq 1 \end{cases}$ do $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$

Z porównania danego szeregu do szeregu geometrycznego otrzymujemy dwa kryteria

Tw. (kryterium d’Alamberta) Jeżeli istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to

a) $g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

b) $g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny

c) $g = 1 \Rightarrow$ kryterium nie rozstrzyga.

Dowód części (a). $g < 1$, czyli można dobrać dowolnie małe ε , tak aby $g + \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon = g_1 < 1 &\Rightarrow \forall n \geq n_0 a_{n+1} < g_1 a_n \\ \text{Stąd kolejno otrzymujemy} & \\ a_{n_0+1} < g_1 a_{n_0} & \\ a_{n_0+2} < g_1 a_{n_0+1} < g_1^2 a_{n_0} & \\ \vdots & \\ a_{n_0+k} &\leq g_1^k a_{n_0} \end{aligned}$$

Od pewnego n_0 szacujemy wyrazy ciągu a_n wyrazami zbieżnego ciągu geometrycznego i stosujemy I kryterium porównawcze. Stąd teza. Podobnie dowodzimy punkt b.

Przykład Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Dla rozważanego szeregu o wyrazach nieujemnych mamy $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$

Z kryterium d'Alamberta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ więc

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ jest zbieżny. Z warunku koniecznego zbieżności otrzymujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Tw. (kryterium Cauchy'ego) Jeżeli istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, to

- a) $g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
- b) $g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
- c) $g = 1$ kryterium nie rozstrzyga.

Dowód podobny do powyższego. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq g + \varepsilon = g_1 < 1 \Rightarrow a_n \leq g_1^n$ dla $n > n_0$ itd.

Szeregi naprzemienne

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ gdzie $a_n \geq 0$ nazywamy szeregiem naprzemiennym.

$$a_1 > a_2 > \dots > 0$$

Tw.(Leibniza) Jeżeli ciąg (a_n) monotonicznie maleje do zera to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

jest zbieżny do sumy zawartej w $(a_1 - a_2, a_1)$.

Dow. $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ rosnący podciąg o numerach parzystych

$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n} - a_{2n+1})$ malejący podciąg o numerach nieparzystych

$$a_1 - a_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n+1} < a_1$$

Ciągi sum częściowych S_{2n} i S_{2n+1} są więc monotoniczne i ograniczone, czyli zbieżne i to do tej samej granicy, gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$

Wniosek. Szereg **anharmoniczny**: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ jest zbieżny do $g \in (\frac{1}{2}, 1)$

Szeregi liczbowe o wyrazach dowolnych

Def. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym** jeżeli zbieżny jest $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, to jest **zbieżny** (ale $\nLeftarrow$).

Dow. z zupełności R wynika, że wystarczy spełnienie warunku Cauchy'ego dla ciągu $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$:

Dla $m > n > n_0$ mamy $|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$, czyli jest spełniony warunek Cauchy'ego dla S_n , gdyż jest spełniony warunek Cauchy'ego dla zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Def. Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny nazywamy szeregiem **warunkowo zbieżnym**

Przykład. Szereg **anharmoniczny** jest warunkowo zbieżny.

Uogólnienie na przypadek szeregu o wartościach w przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$

Def. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym** jeżeli zbieżny jest szereg norm $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$.

Tw. W przestrzeniach Banacha (istotna jest zupełność), jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny. (dowód jak powyżej)

Zmiana porządku wyrazów w szeregu

Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ różnią się tylko porządkiem wyrazów jeżeli w ciągu $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$ każda liczba naturalna występuje dokładnie jeden raz, tzn $\nu: N \rightarrow N$ bijekcja.

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to nie zmienia swej sumy, przy dowolnej zmianie porządku wyrazów (także w przestrzeni unormowanej).

Tw. (Riemanna) W szeregu warunkowo zbieżnym można zmienić porządek wyrazów tak, aby nowy szereg był zbieżny do dowolnie wcześniej zadanej sumy lub by nowy szereg był rozbieżny.

Iloczyn Cauchy'ego szeregów (splot)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ - dane szeregi liczbowe.

Def. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ nazywamy iloczynem Cauchy'ego szeregów.

Uwaga. Wyrazy $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ uzyskuje się tak jak współczynniki iloczynu wielomianów

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny do A oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do B , to iloczyn

Cauchy'ego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (gdzie $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$) jest zbieżny do $A \cdot B$.

Uwaga. Iloczyn Cauchy'ego szeregów można zdefiniować w ogólniejszym przypadku. Aby to zrobić trzeba mieć taką strukturę w której umiemy mnożyć elementy np. algebra Banacha

Ciągi i szeregi funkcyjne

Rozważać będziemy funkcje zespolone zmiennej zespolonej

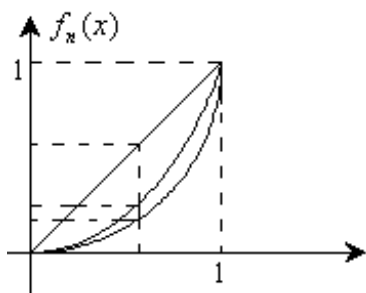
Rozważmy funkcję $f_n : C \supset E \rightarrow C$ $n = 1, 2, \dots$ (w szczególności $f_n : R \supset E \rightarrow R$)

Jeżeli $\forall_{x \in E}$ ciąg (liczb zespolonych) $f_n(x)$ jest zbieżny, to możemy określić tzw. **punktową** granicę ciągu funkcyjnego $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$:

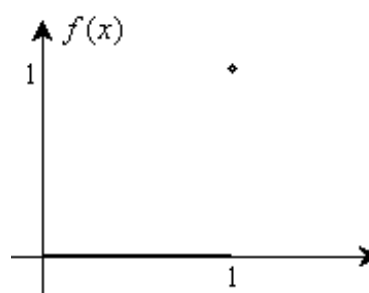
Def Ciąg (f_n) jest **punktowo zbieżny** do f na zbiorze E co zapisujemy $f_n \xrightarrow{E} f$ gdy

$$\forall_{x \in E} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Np.: $f_n(x) = x^n$ $E = [0, 1]$



Granicznie:



Zazwyczaj w przejściach granicznych nie zachowują się własności funkcji f_n (ciągłość, różniczkowalność, itp.) gdyż zbieżność punktowa jest za słaba. Zdefiniujemy więc mocniejszą zbieżność jednostajną

Def. Ciąg (f_n) jest **jednostajnie zbieżny** do f na zbiorze E co zapisujemy $f_n \xrightarrow[E]{\text{f}} f$, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Równoważnie } f_n \xrightarrow[E]{\text{f}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Uwaga. Zbiór funkcji $X = \{f : C \supset E \rightarrow C, f \text{ – ograniczona}\}$ **ograniczonych** na zbiorze E jest przestrzenią metryczną z metryką Czebyszewa $\rho(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$. Jest on także przestrzenią unormowaną z normą $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Zbieżność jednostajna ciągu funkcji ograniczonych jest więc zbieżnością w sensie metryki (normy) Czebyszewa. Pojawia się naturalne pytanie. Czy zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego jest równoważna zbieżności według odpowiednio dobranej metryki (lub normy). Odpowiedź jest negatywna. Nie istnieje żadna metryka w przestrzeni X realizująca zbieżność punktową.

Uzupełnienie - Przestrzeń metryczna

Niech X będzie dowolnym **niepustym** zbiorem. Funkcję $\rho(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ spełniającą następujące warunki:

1. $\forall_{x, y \in X} \quad \rho(x, y) \geq 0 \quad \text{ i } \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall_{x, y \in X} \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall_{x, y, z \in X} \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (warunek trójkąta)

nazywamy metryką w zbiorze X a parę (X, ρ) nazywamy przestrzenią metryczną

Tw. $f_n \xrightarrow[E]{\text{f}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{E} f$

Ponieważ szereg to ciąg sum częściowych, można mówić o jednostajnej zbieżności ciągu i szeregu funkcyjnego.

Tw. (Kryterium Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego)

$$f_n \xrightarrow[E]{\text{f}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Tw. (Weierstrassa) Jeżeli $\forall_n \forall_{x \in E} |f_n(x)| \leq a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na E .

Dowód. Wykażemy, że dla ciągu sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ spełniony jest warunek z

kryterium Cauchy'ego. Dla $m > n > n_0$ mamy $\forall x \in E$

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_m(x)| \leq a_{n+1} + \dots + a_m \leq \varepsilon,$$

(bo szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, czyli spełnia też warunek Cauchy'ego).

SZEREGI POTĘGOWE

(c_n) – ciąg liczb zespolonych

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ - szereg potęgowy,

gdzie (c_n) - ciąg współczynników szeregu, $z_0 \in C$ - środek, „centrum” (ustalone), $z \in C$ - zmienna.

Dla dowolnego ustalonego $z \in C$ szereg potęgowy może być zbieżny albo rozbieżny. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ jest zbieżny w pewnym punkcie $w \in C$, to jest on zbieżny w każdym kole domkniętym

$|z - z_0| \leq r$, gdzie $r < |w - z_0|$. Rzeczywiście ze zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n$ i z WK zbieżności szeregu mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n (w - z_0)^n = 0$, a stąd $|c_n (w - z_0)^n| \leq K$. Wobec tego dla $z \in C$ spełniających warunek $0 < |z - z_0| \leq r$, gdzie $r < |w - z_0|$ dostajemy

$$|c_n (z - z_0)^n| \leq |c_n (w - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \right)^n \leq K q^n, \text{ gdzie } 0 < q < 1. \text{ Stąd teza}$$

Podobnie jeśli szereg jest rozbieżny w pewnym punkcie w , to jest rozbieżny dla $z \in C$ spełniających warunek $|z - z_0| \geq r$, gdzie $r < |w - z_0|$.

Wobec tego, z każdym szeregiem potęgowym związane jest tzw. koło zbieżności. Jeżeli $z \in C$ leży we wnętrzu koła zbieżności, to szereg jest zbieżny. Jeżeli na zewnątrz – to rozbieżny, zaś jeżeli z leży na okręgu koła, to badanie zbieżności wymaga stosowania specjalnych metod.

Tw: (O promieniu zbieżności R szeregu potęgowego) Jeżeli istnieje granica

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad (\text{d'Alambert})$$

lub

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (\text{Cauchy}),$$

$$\text{to } R = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & 0 < \alpha < \infty \\ \infty & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha = \infty \end{cases}$$

Dow. (fragment) $z \in C$ – dowolnie ustalone, badamy bezwzględną zbieżność $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Dla ustalonego $z \in C$ szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z - z_0|^n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych.

$$\text{Z kryterium d'Alamberta } g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| |z - z_0|^{n+1}}{|c_n| |z - z_0|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |z - z_0| = \alpha |z - z_0|,$$

wiec gdy $\alpha |z - z_0| < 1$ szereg jest zbieżny. Wobec tego dla $z \in C$ spełniających warunek

$|z - z_0| < \frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \infty$) – szereg jest zbieżny czyli jest także zbieżny w kole $|z - z_0| < R$ o promieniu $R = \frac{1}{\alpha}$. (Podobnie dla $\alpha = 0 \vee \alpha = \infty$).

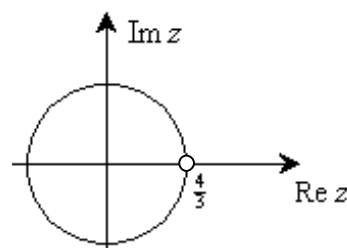
Z kryterium Weierstrassa wynika ponadto, że szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny, w każdym kole domkniętym zawartym w kole zbieżności (bez brzegu!)

Przykład. Zbadać obszar zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n4^n} z^n$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{n4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \frac{3}{4} \Rightarrow R = \frac{4}{3}$$

jeżeli z leży na okręgu $\Leftrightarrow z = \frac{4}{3}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{4}{3}e^{i\varphi}$

$$\text{i wówczas } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n4^n} \left(\frac{4}{3}\right)^n e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} e^{in\varphi}$$



Tw. Kryterium Dirichleta. Jeżeli

- ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznie malejącym do zera
- $\forall_n \forall_{z \in E} |S_n(z)| = \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| \leq M$ (czyli ciąg sum częściowych $\sum_{k=0}^n f_k(z)$ jest ograniczony)

to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze E

Jeżeli w powyższym kryterium ustalimy $z \in C$, to otrzymamy jeszcze jedno kryterium zbieżności szeregu liczbowego ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, gdzie $b_n = f_n(z)$).

Ciąg dalszy przykładu

$$\varphi \neq 0 \quad \frac{3}{n} \downarrow 0 \quad S_n = \sum_{k=1}^n e^{i\varphi k} = \sum_{k=1}^n (e^{i\varphi})^k = \dots \text{ciąg geometryczny} \dots = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

$$|S_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|} \Rightarrow \forall_{\varphi \neq 0}, \text{ stąd dla } \varphi \neq 0 \text{ szereg jest zbieżny.}$$

Dla $\varphi = 0$ dostajemy szereg harmoniczny (rozbieżny)

W przypadku rzeczywistym kołem zbieżności jest przedział na osi, a jego brzegiem końce przedziału.

Zbieżność jednostajna a ciągłość

Tw. Jeżeli

- $f_n : E \rightarrow R$ jest ciągiem funkcji ciągłych na E
- $f_n \xrightarrow[E]{\text{unif}} f$

to f jest ciągła na E

Dow. Pokażemy ciągłość granicznej funkcji f w dowolnym punkcie $x_0 \in E$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

gdy $|x - x_0| \leq \delta$.

Nierówności $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ są konsekwencjami jednostajnej zbieżności ciągu (f_n) do $f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, a nierówność $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ wynika z ciągłości funkcji f_n w punkcie x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in E |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\textbf{Wnioski: } \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)]$$

(zmiana kolejności granic)

Tw. (wariant dla szeregu) Jeżeli

- $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji ciągłych na E
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – zbieżny jednostajnie na E

to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą na E

$$\textbf{Wniosek: } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

Jeżeli szereg funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to można przejść do granicy wyraz po wyrazie.

Zbieżność jednostajna a całkowanie

Tw: (zbieżność jednostajna a całkowanie) Jeżeli

- $\forall_n f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ (całkowalna w sensie Riemanna)
- $f_n \xrightarrow[E]{\text{jed.}} f$, gdzie $E = [a, b]$

$$\text{to } f \in \mathcal{R}[a, b] \text{ i } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Tw. (wariant dla szeregu)

- $\forall_n f_n \in \mathcal{R}[a, b]$
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – jednostajnie zbieżny

$$\text{to } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b] \text{ i } \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Szereg jednostajnie zbieżny funkcji całkowalnych w sensie Riemanna można całkować wyraz po wyrazie.

Zbieżność jednostajna a różniczkowalność

Uwaga: Ciąg $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ funkcji różniczkowalnych na $\mathbb{R}$ jest jednostajnie zbieżny do $f(x) \equiv 0$, a ciąg pochodnych $f'_n(x) = \cos(nx)$ nie jest nawet punktowo zbieżny (np. rozbieżny dla $x = \frac{\pi}{2}$)

Tw. Jeżeli

- $\forall_n f_n : [a, b] \rightarrow R$ różniczkowalna na $[a, b]$
- ciąg liczbowy $f_n(x_0)$ jest zbieżny dla pewnego $x_0 \in [a, b]$
- f'_n jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$

to ciąg funkcyjny f_n jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ do pewnej różniczkowalnej funkcji f

$$(f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} f) \text{ i } \forall_{x \in [a, b]} \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$$

Tw: (wariant dla szeregu) Jeżeli

- $\forall_n f_n$ różniczkowalne na $[a, b]$
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ – zbieżny dla pewnego $x_0 \in [a, b]$
- $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ jednostajnie zbieżny na $[a, b]$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ i $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

Zastosowanie do szeregów potęgowych.

Def. Jeżeli f ma przedstawienie w postaci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $c_n, z, z_0 \in C$, to f nazywamy **funkcją analityczną**.

Ponieważ nie wprowadzono pojęcia pochodnej funkcji $f: C \rightarrow C$, ani całki takiej funkcji, ograniczmy się do funkcji zmiennej rzeczywistej.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad c_n, x, x_0 \in R$$

Założmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ jest zbieżny w przedziale $|x - x_0| < R$. Wówczas

- szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale postaci $[x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon]$.
- suma szeregu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ jest ciągła i różniczkowalna na $(x_0 - R, x_0 + R)$, oraz

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1} \quad (\text{szereg po zróżniczkowaniu ma taki sam promień zbieżności jak szereg wyjściowy})$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) c_n (x - x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) c_n (x - x_0)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(x_0) = k! c_k \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Stąd $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ jest sumą swojego szeregu Taylora

- $\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ szereg potęgowy można całkować wyraz po wyrazie

Przykład. Znaleźć promień zbieżności i sumę wewnątrz przedziału zbieżności

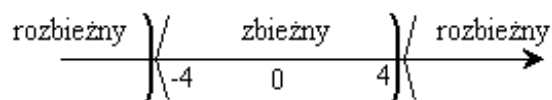
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n} \quad (a_n = \frac{1}{(n+3)4^n}, x_0 = 0)$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+3)4^n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{\alpha} = 4$$

dla $x = 4$ otrzymujemy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)}$ - rozbieżny (harmoniczny)

dla $x = -4$ otrzymujemy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)}$ - zbieżny (anharmoniczny)

Przedział zbieżności $[-4, 4)$



Promień zbieżności nie zmienia się po całkowaniu i różniczkowaniu szeregu potęgowego

$$(*) \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n} x^n \quad / \cdot x^3$$

$$S(x)x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n} x^{n+3} \quad / \frac{d}{dx}$$

$$[S(x)x^3]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^{n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{4x^2}{4-x} \quad \text{dla } |x| < 4 \quad / \int_0^x (\cdot) dt$$

$$S(x)x^3 - S(0)0^3 = -2x^2 - 16x + 64 \ln \frac{4}{4-x} \quad (|x| < 4 \Rightarrow 4-x > 0 \Rightarrow |4-x| = 4-x)$$

$$(**) \quad S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} (-2x^2 - 16x + 64 \ln \frac{4}{4-x}) & 0 < |x| < 4 \\ \frac{1}{3} & x = 0 \\ \ln 2 - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -4^+} S(x) \text{ tw. Abela} & x = -4 \end{cases}$$

$S(0)$ wyznaczamy wstawiając $x = 0$ do wzoru $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n} x^n$ i uwzględniając umowę

$$x^0 = 1 \quad \forall x \quad (\text{w szczególności } 0^0 = 1). \text{ Wobec tego } S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n} 0^n = \frac{1}{(0+3)4^0} 0^0 = \frac{1}{3}$$

Uwaga 1. Umowa $x^0 = 1 \quad \forall x$ (w szczególności $0^0 = 1$) nie jest w sprzeczności z symbolem nieoznaczonym 0^0 w którym zarówno podstawa potęgi jak i wykładnik zmierzają do 0. W naszym przypadku x^0 wykładnik jest równy 0 i mamy więc zdefiniowaną funkcję stałą $x^0 = 1$ w sąsiedztwie punktu 0. Punkt ten jest punktem nieciągłości usuwalnej, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1$.

Uwaga 2. Suma szeregu potęgowego jest funkcją jednostajnie ciągłą w każdym przedziale

domkniętym zawartym w przedziale zbieżności. Stąd $S(0) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \frac{1}{3}$

Do wyznaczania wartości sumy szeregu w punkcie końcowym przedziału zbieżności wykorzystano następujące

Tw. (Abela). Jeżeli szereg potęgowy jest **zbieżny w punkcie końcowym przedziału zbieżności**, to jego suma jest funkcją **jednostronnie ciągłą** w tym punkcie.

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest postaci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, $|x - x_0| < R$ przy czym promień zbieżności jest dodatni (czyli f jest analityczna w $(x_0 - R, x_0 + R)$), to jest ona funkcją klasy $C_{(x_0-R, x_0+R)}^{\infty}$, tzn. ma wszystkie pochodne ciągłe w $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Funkcja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ jest funkcją klasy C_R^{∞} , tzn. ma wszystkie pochodne ciągłe w R i

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \quad \text{stad} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \neq f(x). \quad \text{W tym przypadku funkcja } f \text{ klasy } C_R^{\infty}$$

nie jest sumą swojego szeregu Taylora, czyli nie jest funkcją analityczną. Jest tak dlatego, że ciąg reszt R_n we wzorze Taylora nie zbiega do zera gdy $n \rightarrow \infty$.

Łatwo pokazać, że jeśli $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall x: |x - x_0| < R$, to reszta we wzorze Taylora

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{n!} R^n, \quad \text{a szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n!} R^n \text{ jest zbieżny (kryterium d'Alamberta), stad}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n!} R^n = 0.$$

Przykłady rozwinięć Taylora (Maclaurina)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in R$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in R$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in R$$

Jeśli A jest macierzą kwadratową $n \times n$ o normie $\|A\|$, to korzystając z faktu, że zbieżność szeregu (liczbowego) nom pociąga za sobą zbieżność szeregu w przestrzeni unormowanej możemy zdefiniować funkcje macierzowe

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \frac{A^5}{5!} + \dots,$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \dots,$$

Problem. Jak efektywnie wyznaczać te (i inne) funkcje? Ponieważ każda macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne, to wyższe potęgi macierzy A są liniowymi kombinacjami niższych potęg i w konsekwencji powyższe szeregi redukują się do wielomianów macierzowych. Sposób wyznaczania macierzy e^{At} zostanie omówiony przy okazji układów równań różniczkowych liniowych.

- Wyznaczyć promień zbieżności, przedział zbieżności i sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} (x-2)^n$.

Rozw. $y = \frac{x-2}{2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)y^n$; $R_y = 1 \Rightarrow |\frac{x-2}{2}| < 1 \Rightarrow 0 < x < 4$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^{n+1} = \frac{y^2}{1-y} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)y^n = \frac{2y-y^2}{(1-y)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)ny^{n-1} = \frac{2}{(1-y)^3} \Rightarrow S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)ny^n = \frac{2y}{(1-y)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} (x-2)^n = S\left(\frac{x-2}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x-2}{2}}{(1-\frac{x-2}{2})^3} = \frac{8(x-2)}{(4-x)^3}; \quad 0 < x < 4.$$

- Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$; w przypadku zbieżności wyznacz jego sumę.

Rozw. Kryterium d'Alamberta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ szereg zbieżny.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = 1 - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \\ &= 1 - 2S\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\left(-\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2}\right) = 2 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x \frac{t-1+1}{1-t} dt = -x - \ln |1-x|$$