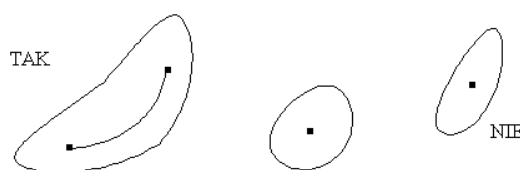


Spójne przestrzenie metryczne

Def. Przestrzeń metryczną (X, ρ) nazywamy **spójną** jeżeli nie da się jej przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów **niepustych, otwartych, rozłącznych**.

$$(X, \rho) - \text{przestrzeń spójna} \Leftrightarrow \sim \begin{cases} X = X_1 \cup X_2 \\ X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 - \text{otwarte} \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$

Inaczej X jest zbiorem spójnym jeżeli dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieje droga łącząca x_1, x_2 , czyli istnieje ciągła funkcja $\gamma: [a, b] \rightarrow X: \gamma(a)=x_1$ i $\gamma(b)=x_2$



Tw. Ciągły obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym

$$\left. \begin{array}{l} f: X \rightarrow Y \\ (X, \rho) - \text{przestrzeń spójna} \\ f - \text{ciągła} \end{array} \right\} \Rightarrow f[X] \text{ jest przestrzenią spójną}$$

Dow: (a.a.) $f[X]$ nie jest przestrzenią spójną, czyli istnieją $Y_1, Y_2 \subset Y$ otwarte w $f[X]$, takie, że: $f[X] = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \neq \emptyset$, $Y_2 \neq \emptyset$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Stąd $X = f^{-1}[f[X]] = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$, czyli przestrzeń X jest sumą dwóch zbiorów niepustych, otwartych i rozłącznych (z własności przeciwwobrazu), co prowadzi do sprzeczności.

Podstawowe twierdzenia o funkcjach ciągłych

Tw. (Weierstrassa)

$$\left. \begin{array}{l} f: X \rightarrow R - \text{ciągła na } X \\ X - \text{przestrzeń metryczna zwarta} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f - \text{ograniczona na } X \\ f(x_1) = \sup_{x \in X} f(x) \\ \exists_{x_1, x_2 \in X} : f(x_2) = \inf_{x \in X} f(x) \end{array}$$

Dowód jest natychmiastową konsekwencją faktu, że $f[X]$ jest zwartym podzbiorem R , czyli ograniczonym i domkniętym więc zawierającym w sobie swoje ograniczenia (czyli kresy).

Tw. (Darboux) (o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Jeżeli $f: X \rightarrow R$ - ciągła i X - przestrzeń metryczna spójna to

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \forall_{y \in R} f(x_1) < y < f(x_2) \Rightarrow \exists_{x \in X} y = f(x)$$

Dowód jest natychmiastową konsekwencją faktu, że ciągły obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym i faktu, że jedynymi zbiorami spójnymi w R są przedziały.

Tw: (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeżeli funkcja $f: X \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ - ciągła na **zbiornie otwartym** A , $x_0 \in A$ i $f(x_0) > 0$, to istnieje otoczenie punktu x_0 (powiedzmy $K(x_0, \delta)$) takie, że $\forall x \in K(x_0, \delta) \ f(x) > 0$.

Dowód. Ponieważ $f(x_0) > 0$, więc $\exists \varepsilon > 0 \quad 0 < f(x_0) - \varepsilon$. Z ciągłości $f \Rightarrow$ zbiór $f^{-1}[(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)]$ jest otwarty w X a więc $f^{-1}[(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)] \cap A$ jest również otwarty. Stąd $\exists \delta > 0$ $K(x_0, \delta) \subset f^{-1}[(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)]$. Wobec tego $\exists \delta > 0 \ \forall x \in K(x_0, \delta) \ f(x) > 0$ (bo $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$)

Tw. (Cantora) Jeżeli

- X – przestrzeń metryczna zwarta
- Y – dowolna przestrzeń metryczna
- $f: X \rightarrow Y$ - ciągła na X

to f jest **jednostajnie ciągła** na X .

Inaczej. Funkcja ciągła określona na przestrzeni metrycznej zwartej jest jednostajnie ciągła.

Dow: (a.a.) Nieprawda, że f jest jednostajnie ciągła $\Leftrightarrow$

$$\sim \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall x' \in X \rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \right] \Leftrightarrow$$

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X \exists x' \in X \rho_X(x, x') < \delta \wedge \rho_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$ Dla każdego δ , czyli w szczególności dla $\delta = 1/n$ też $\Rightarrow$ istnieją ciągi (x_n) , (x'_n) takie, że $\rho_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ i $\rho_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$ (istnieje takie ε).

Ponieważ (x_n) jest ciągiem w zwartej przestrzeni metrycznej X , więc można z niego wybrać podciąg zbieżny $x_{n_k} \rightarrow a$. Z warunku trójkąta mamy $\rho_X(x'_{n_k}, a) \leq \rho_X(x'_{n_k}, x_{n_k}) + \rho_X(x_{n_k}, a)$

skąd wynika, że $x'_{n_k} \rightarrow a$. Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_{n_k}) \rightarrow f(a)$ i $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(a)$, więc z ciągłości metryki $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \rightarrow 0$, co przeczy warunkowi $\rho_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon \ \forall n$

Tw: (o ciągłości funkcji odwrotnej) Jeżeli

- X – przestrzeń metryczna **zwarta**, Y – przestrzeń metryczna
- funkcja $f: X \rightarrow Y$ - ciągła na X
- f - różnowartościowa

to f^{-1} istnieje i jest ciągła na $f[X]$.

Dowód. Aby dowieść ciągłości funkcji $g=f^{-1}$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ zbiór $g^{-1}[A]=f[A]$ jest domknięty w Y . Jest to oczywiste, bo zbiór A jest zwarty (domknięty podzbiór przestrzeni zwartej) więc $f[A]$ jest również zwarty (ciągły obraz zbioru zwartego) a więc domknięty w Y .

Uwaga. Założenie zwartości X jest istotne. Np. $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$. **Rysunek**

Pochodna Frecheta (pochodna mocna)

Niech $(X, \|\cdot\|_x)$ i $(Y, \|\cdot\|_y)$ przestrzeniami unormowanymi nad tym samym ciałem, a $A : X \rightarrow Y$ odwzorowaniem (operatorem) liniowym przestrzeni X w Y .

Def. Odwzorowanie liniowe $A : X \rightarrow Y$ nazywamy ograniczonym jeżeli istnieje stała $L > 0$ taka, że dla każdego wektora $\mathbf{x} \in X$ prawdziwa jest nierówność $\|A\mathbf{x}\|_y \leq L\|\mathbf{x}\|_x$.

Ograniczoność odwzorowania liniowego $A : X \rightarrow Y$ w oczywisty sposób implikuje jego ciągłość. Z liniowości wynika że ciągłość odwzorowania liniowego w dowolnym punkcie jest równoważna jego ciągłości w punkcie 0. Z ciągłości odwzorowania A w punkcie 0 wynika, że dla każdego wektora $\mathbf{x}$ o normie $\|\mathbf{x}\| \leq \delta$ mamy $\|A\mathbf{x}\| \leq 1$. Stąd dla dowolnego $\mathbf{x} \neq 0$ mamy

$$\|A\mathbf{x}\| = \left\| A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \delta \frac{\|\mathbf{x}\|}{\delta} \right\| \leq \left\| A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \delta \right\| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\delta} \leq \frac{\|\mathbf{x}\|}{\delta} \text{ bo } \left\| A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \delta \right\| \leq 1.$$

Zbiór odwzorowań liniowych i ograniczonych $B(X, Y)$ przestrzeni X w Y jest przestrzenią liniową w której wprowadzamy normę

$$\|A\| = \inf_L \{ \|A\mathbf{x}\|_y \leq L\|\mathbf{x}\|_x \}.$$

Łatwo pokazać, że rzeczywiście są w tym przypadku spełnione postulaty normy.

Można pokazać, że $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|A\mathbf{x}\|_y$.

Uwaga. Nie każde odwzorowanie liniowe jest ograniczone (ciągłe). Na przykład odwzorowanie $(Ax)(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ określone na $C_{[0,1]}^1 \subset C_{[0,1]}^0$ jest liniowe, ale nie jest ograniczone, bo dla ciągu jednomianów $x_n(t) = t^n$ o normie 1 mamy $(Ax_n)(t) = nt^{n-1}$, więc $\|Ax_n\| = n \rightarrow \infty$.

Niech $(X, \|\cdot\|_x)$ i $(Y, \|\cdot\|_y)$ będą przestrzeniami Banacha, $D \subset X$, D -otwarty, $\mathbf{x} \in D$.

Def. Odwzorowanie $f : X \supset D \rightarrow Y$ nazywamy różniczkowalnym w sensie Frecheta w punkcie $\mathbf{x} \in D$ jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe ciągłe $\mathbf{A}_\mathbf{x} : X \rightarrow Y$ takie, że $\forall_{\mathbf{h} \in X} : \mathbf{x} + \mathbf{h} \in D$ zachodzi $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\mathbf{x} \mathbf{h} + r(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, przy czym $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|r(\mathbf{x}, \mathbf{h})\|_y}{\|\mathbf{h}\|_x} = 0$.

Odwzorowanie $\mathbf{A}_\mathbf{x}$ nazywamy pochodną Frecheta funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ i oznaczamy $f'(\mathbf{x})$ lub $df(\mathbf{x})$.

Wartość odwzorowania $\mathbf{A}_\mathbf{x}$ na przyroście (wektorze) $\mathbf{h} \in X$ nazywamy różniczką odwzorowania f przy danym przyroście i oznaczamy $\mathbf{A}_\mathbf{x} \mathbf{h} = df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = df(\mathbf{x})\mathbf{h}$.

Wiadomo z kursu algebry, że przypadku przestrzeni liniowych o skończonym wymiarze odwzorowanie liniowe $\mathbf{A}_\mathbf{x}$ jest reprezentowane przez macierz. W przypadku przestrzeni euklidesowych przyjmujemy standardowo bazy kanoniczne i przekształcenie liniowe utożsamiamy z macierzą reprezentującą to przekształcenie w bazach kanonicznych

Gdy f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru D , to mówimy, że odwzorowanie f jest różniczkowalne na D a odwzorowanie $f': \mathbf{x} \in D \subset X \rightarrow f'(\mathbf{x}) \in L(X, Y)$ [$L(X, Y)$ - zbiór funkcji liniowych ciągłych $\varphi: X \rightarrow Y$] nazywamy pochodną odwzorowania f .

Tw. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}$, to jest ona ciągła w punkcie $\mathbf{x}$.

Jest to natychmiastowa konsekwencja definicji różniczkowalności

Przypadek szczególny

$f: R^n \supset D \rightarrow R$, D -otwarty, $\mathbf{x} \in D$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\mathbf{x} \mathbf{h} + r(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \quad \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{|r(\mathbf{x}, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \quad \mathbf{A}_\mathbf{x} = [A_1, \dots, A_n] \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$$

$$f'(\mathbf{x}) = [A_1, \dots, A_n] = df(\mathbf{x}) \quad df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = df(\mathbf{x})\mathbf{h} = f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = [A_1, \dots, A_n] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Macierz wierszową (wektor) $[A_1, \dots, A_n]$ nazywamy **gradientem** funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ i oznaczamy $\text{grad } f(\mathbf{x}) = [A_1, \dots, A_n]$.

Inny przypadek szczególny

$$f: R \supset (a, b) \rightarrow R^n; \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad f(x+h) - f(x) = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} h + r(x, h) \quad \frac{\|r(x, h)\|}{|h|} \rightarrow 0$$

Funkcję f interpretujemy jako równanie parametryczne krzywej w R^n , a x jako czas.

Okaże się, że wektor $\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ jest styczny do krzywej o równaniu parametrycznym $\vec{\mathbf{r}} = f(x)$.

Pochodne cząstkowe i kierunkowe

$f: R^n \supset D \rightarrow R$, D - otwarty, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$

Def. Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ względem i -tej zmiennej (czyli x_i) nazywamy skończoną (o ile istnieje) granicę

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h_i} \stackrel{df}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x})$$

Def. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ w kierunku wektora $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ (zwykle przyjmuje się, że $\|\mathbf{k}\|=1$, czyli w kierunku wersora) nazywamy skończoną (o ile istnieje) granicę

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x})}{t} \stackrel{df}{=} \mathbf{f}'_\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \nabla_\mathbf{k}(\mathbf{x}).$$

Uwaga 1. $\varphi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{k})$ - funkcja jednej zmiennej

Uwaga 2. Pochodna cząstkowa jest szczególnym przypadkiem pochodnej kierunkowej w kierunku i -

$$\text{tego wektora bazy kanonicznej } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{x})$$

Pochodne cząstkowe i kierunkowe a różniczkowalność.

Założmy, że $f : R^n \supset D \rightarrow R$, D - otwarty, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ jest różniczkowalna w sensie Frecheta w punkcie $\mathbf{x}$. Wówczas

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot t\mathbf{k} + r(\mathbf{x}, t\mathbf{k}) \quad /: t \quad r(\mathbf{x}, t\mathbf{k}) = o(\|t\mathbf{k}\|)$$

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k} + \frac{r(\mathbf{x}, t\mathbf{k})}{t}$$

$$\left| \frac{r(\mathbf{x}, t\mathbf{k})}{t} \right| = \frac{|r(\mathbf{x}, t\mathbf{k})|}{\|t\mathbf{k}\|} \|\mathbf{k}\| \rightarrow 0, \text{ gdy } t \rightarrow 0 \Rightarrow f'_k(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \mathbf{k}$$

Niech $\mathbf{e}_i$ - i -ty wektor bazy kanonicznej

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}) = [A_1, \dots, A_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \{i\text{-te miejsce}\} = A_i$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right]$$

Ogólnie dla $\mathbf{f} : R^n \supset D \rightarrow R^m$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m f_j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Pokazano więc fakt: Jeżeli funkcja $\mathbf{f} : R^n \supset D \rightarrow R^m$, $\mathbf{x} \in D$ - otwarty, jest różniczkowalna w

punkcie $\mathbf{x}$, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, $j=1, \dots, m$ $i=1, \dots, n$.

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi, tzn. istnienie pochodnych cząstkowych nie gwarantuje różniczkowalności (a nawet nie gwarantuje ciągłości)

Przykład .
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- pochodne cząstkowe

$$\mathbf{x} = (x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(x^2 + y^6) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{y^3(-x^2 + y^6)}{(x^2 + y^6)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^2x(x^2 + y^6) - xy^3(6y^5)}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{3xy^2(x^2 - y^6)}{(x^2 + y^6)^2}$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x 0}{\Delta x^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

- pochodna kierunkowa

$$\mathbf{x} = (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2) \quad \|(k_1, k_2)\| = 1$$

$$\begin{aligned} f'_{(k_1, k_2)}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tk_1, y + tk_2) - f(x, y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(x + tk_1)(y + tk_2)^3}{(x + tk_1)^2 + (y + tk_2)^6} - \frac{xy^3}{x^2 + y^6}}{t} = \frac{y^2(-x^2 + y^6)(yk_1 - 3xk_2)}{(x^2 + y^6)^2} = \\ &= \frac{y^3(-x^2 + y^6)}{(x^2 + y^6)^2} k_1 + \frac{3xy^2(x^2 - y^6)}{(x^2 + y^6)^2} k_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)k_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = (x, y) = (0, 0)$$

$$f'_k(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(k_1, k_2)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tk_1, tk_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tk_1(tk_2)^3}{(tk_1)^2 + (tk_2)^6}}{t} = 0$$

Funkcja f ma więc w każdym punkcie (w szczególności w punkcie $(0, 0)$) i w każdym kierunku pochodną. Czy jest więc różniczkowalna w $(0, 0)$. Jeśli tak, to:

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) - f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r((0, 0), (h_1, h_2)), \text{ gdzie } r((0, 0), (h_1, h_2)) = f(h_1, h_2)$$

Pytanie. Czy $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|r((0, 0), (h_1, h_2))|}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$? **Nie**, gdyż granica ta nie istnieje. Nie istnieje nawet

granica $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} f(h_1, h_2)$, bo wybierając dwa różne ciągi $(\frac{1}{n}, 0) \rightarrow (0, 0)$, i $(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ mamy

$$f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \rightarrow 0, \text{ a } f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Wykazaliśmy więc, że posiadanie w danym punkcie pochodnej kierunkowej w dowolnym kierunku (w szczególności posiadanie pochodnych cząstkowych) nie zapewnia różniczkowalności a nawet ciągłości funkcji w tym punkcie.

Przykład różniczkowania odwzorowania w przestrzeni funkcyjnej.

Niech $\mathcal{K}(x, t)$ będzie rzeczywistą funkcją ciągłą na kwadracie $[a, b] \times [a, b]$. Rozważmy przestrzeń $C_{[a, b]}$ rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ z normą $\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ i odwzorowanie

$\mathcal{F} : C_{[a, b]} \ni u \rightarrow \mathcal{F}[u](x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) u^2(t) dt \in C_{[a, b]}$. Znaleźć pochodną Frecheta odwzorowania $\mathcal{F}$ w „punkcie” $u \in C_{[a, b]}$.

Niech $h \in C_{[a, b]}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u + h](x) - \mathcal{F}[u](x) &= \int_a^b \mathcal{K}(x, t) (u(t) + h(t))^2 dt - \int_a^b \mathcal{K}(x, t) u^2(t) dt \\ &= 2 \int_a^b \mathcal{K}(x, t) u(t) h(t) dt + \int_a^b \mathcal{K}(x, t) h^2(t) dt \end{aligned}$$

Odwzorowanie $\mathcal{F}'[u] : C_{[a, b]} \ni h \rightarrow (\mathcal{F}'[u] \cdot h)(x) = 2 \int_a^b \mathcal{K}(x, t) u(t) h(t) dt \in C_{[a, b]}$ jest odwzorowaniem

liniowym ciągłym przestrzeni $C_{[a, b]}$ w siebie. Liniowość $\mathcal{F}'[u]$

- $(\mathcal{F}'[u] \cdot (h_1 + h_2))(x) = (\mathcal{F}'[u] \cdot h_1)(x) + (\mathcal{F}'[u] \cdot h_2)(x)$
- $(\mathcal{F}'[u] \cdot (\alpha h))(x) = \alpha (\mathcal{F}'[u] \cdot h)(x)$

wynika z definicji całki. Ciągłość odwzorowania liniowego redukuje się do ciągłości „w punkcie”

$h \equiv 0 \in C_{[a, b]}$. Z własności całki mamy

$$0 \leq \left\| 2 \int_a^b \mathcal{K}(x, t) u(t) h(t) dt \right\| = \sup_{x \in [a, b]} \left| 2 \int_a^b \mathcal{K}(x, t) u(t) h(t) dt \right| \leq 2 \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |\mathcal{K}(x, t) u(t)| dt \sup_{x \in [a, b]} |h(x)| = M \|h\|$$

co implikuje ciągłość $\mathcal{F}'[u]$.

Pozostaje wykazać, że $r(u, h) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) h^2(t) dt$ jest resztą. Rzeczywiście z własności całki mamy

$$\left| \int_a^b \mathcal{K}(x, t) h^2(t) dt \right| \leq \int_a^b |\mathcal{K}(x, t)| dt \sup_{x \in [a, b]}^2 |h(x)|. \text{ Stąd}$$

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, t) h^2(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |\mathcal{K}(x, t)| dt \sup_{x \in [a, b]}^2 |h(x)| = M \|h\|^2 = o(\|h\|).$$