

Tw. (Warunek wystarczający różniczkowalności) Jeżeli funkcja $f : R^n \supset D \rightarrow R$ (D - otwarty, $\mathbf{x} \in D$) ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \ni \mathbf{x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ ($j = 1, \dots, n$) w D , **ciągłe** w $\mathbf{x}$, to f jest różniczkowalna w sensie Frecheta w $\mathbf{x}$.

Dow: dla $n=2$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2)$$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) =$$

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) =$$

z tw. Lagrange'a o wartości średniej

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2 + h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, c_2)h_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})h_2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right)h_2 \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $r(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$ czyli, że

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Jest to prawda, gdyż

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| = 0 \quad \text{z ciągłości}$$

pochodnych cząstkowych w $\mathbf{x}$ a wyrażenia $\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$ i $\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$ są ograniczone,

Interpretacja geometryczna pochodnej

Niech $f : X \supset D \rightarrow Y$. Zbiór punktów $W = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in X \times Y : \mathbf{x} \in D \subset X\}$ nazywamy **wykresem funkcji** $f : X \supset D \rightarrow Y$.

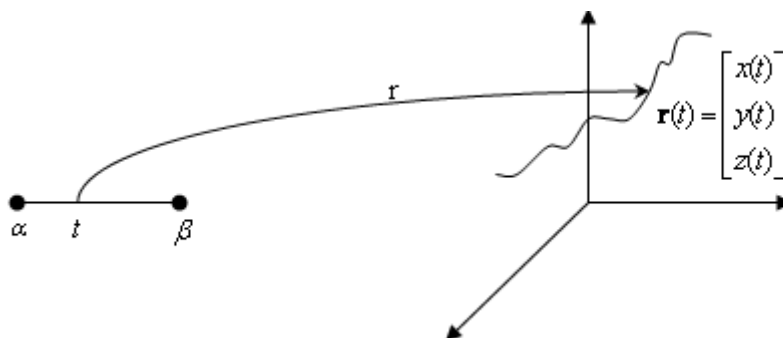
Fakt. Jeżeli funkcja $f : X \supset D \rightarrow Y$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in D$ to wektor $\mathbf{s} \in X \times Y$ jest styczny do wykresu W funkcji f w punkcie $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $\mathbf{h} \in X$ taki, że

$$\mathbf{s} = (\mathbf{h}, f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h})$$

Tw. Jeżeli funkcja $f : X \supset E \rightarrow Y$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in E$, to hiperpłaszczyzna w $X \times Y$ o równaniu $\mathbf{y} = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ jest hiperpłaszczyzną styczną do wykresu funkcji $\mathbf{f}$ w punkcie $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$. Jej wykresem jest $W_{\mathbf{a}}^{st} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \in X \times Y : \mathbf{x} \in X\}$

Przypadki szczególne

- $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in R^3$ jest funkcją wektorową, którą interpretujemy jako opis parametryczny krzywej w R^3 . Załóżmy, że funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie $t_0 \in [\alpha, \beta]$



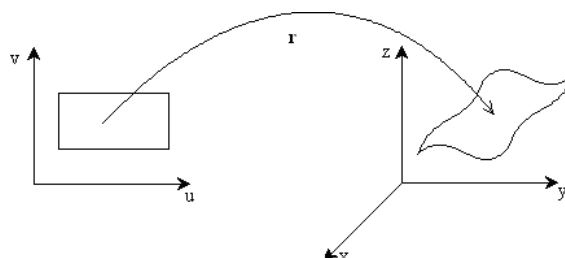
Pochodna $\mathbf{r}'(t_0)$ jest odwzorowaniem liniowym ciągłym z R w R^3 reprezentowanym przez

macierz $\mathbf{r}'(t_0) = \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{bmatrix}$. Prosta o równaniu parametrycznym $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$ jest

styczną do krzywej $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ w punkcie $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$.

- $\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \ni (u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} \in R^3$ jest funkcją wektorową, którą

interpretujemy jako opis parametryczny powierzchni w R^3 . Załóżmy, że funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie (u_0, v_0)



Pochodna $\mathbf{r}'(u_0, v_0)$ jest odwzorowaniem liniowym ciągłym z R^2 w R^3 reprezentowanym przez

macierz $\mathbf{r}'(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)} = [\mathbf{r}_u \quad \mathbf{r}_v]$.

Płaszczyzna o równaniu parametrycznym $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{r}'(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$, które można także zapisać w postaci:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{r}_u(u - u_0) + \mathbf{r}_v(v - v_0),$$

gdzie $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ oznaczają kolumny macierzy reprezentującej pochodną $\mathbf{r}'(u_0, v_0)$ jest płaszczyzną styczną do powierzchni $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ w punkcie $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Po rozpisaniu na współrzędne w postaci równanie płaszczyzny stycznej przybiera postać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} (u - u_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} (v - v_0).$$

Po przemnożeniu obu stron równania $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_u(u - u_0) + \mathbf{r}_v(v - v_0)$ skalarnie przez wektor

$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ortogonalny do $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ rugujemy parametry u i v i otrzymujemy ogólną postać równania płaszczyzny stycznej

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \text{ gdzie } \mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v.$$

W szczególności jeśli powierzchnia jest wykresem funkcji 2 zmiennych $z = f(x_1, x_2)$, to można ją zapisać parametrycznie przyjmując $u = x_1$ i $v = x_2$. Wówczas

$$\mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix}, \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix}, \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Stąd płaszczyzna o równaniu}$$

$$z - b = A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2),$$

gdzie $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$, $A_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)$ $b = f(a_1, a_2)$ jest styczna do powierzchni o równaniu $z = f(x_1, x_2)$ w punkcie (a_1, a_2, b) .

Przykłady

1. Napisać równanie prostej stycznej do krzywej $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t, t \in \mathbb{R} \\ z(t) = \frac{t^2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$ w punkcie $(0, 2, 0)$.

Rozw. Punkowi $A(0, 2, 0)$ odpowiada parametr $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Ponadto $\vec{r}'(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wobec tego

poszukiwane równanie stycznej jest następujące $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$.

2. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = x^2 + y^2$ w punkcie $A(1, 2, 5)$.

Ogólnie $z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. Odp. $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$.

Reguły różniczkowania

Tw. Jeżeli $f: X \supset D \rightarrow Y$ X, Y – przestrzenie unormowane

$g: X \supset D \rightarrow Y$ f, g – różniczkowalne w $\mathbf{x} \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

to $f + g$ i αg są różniczkowalne w $\mathbf{x}$ i

$$\begin{aligned}(f + g)'(\mathbf{x}) &= f'(\mathbf{x}) + g'(\mathbf{x}) \\ (\alpha g)'(\mathbf{x}) &= \alpha g'(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Jeżeli $Y = \mathbb{R}$, to dodatkowo $(f \cdot g)$ i $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w $\mathbf{x}$ i

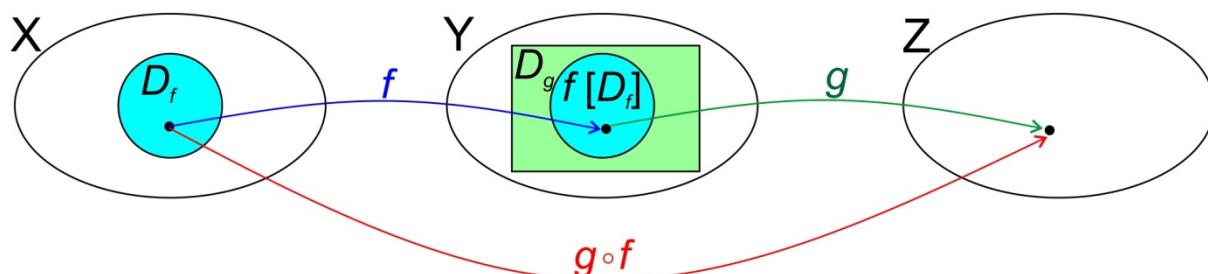
$$(f \cdot g)'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x}) = \frac{f'(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot g'(\mathbf{x})}{g^2(\mathbf{x})} \quad ; \quad g(\mathbf{x}) \neq 0$$

Dowód. (jak dla funkcji jednej zmiennej)

Def. Mówimy, że funkcja f jest klasy C_D^1 jeżeli posiada w każdym punkcie zbioru D wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe w D , czyli jest F -różniczkowalna w każdym punkcie zbioru D .

Różniczkowanie złożenia



X, Y, Z – przestrzenie unormowane, $X \supset D_f$ – otwarty $\mathbf{x} \in D_f$ $f[D_f] \subset D_g$

$$f: X \supset D_f \rightarrow Y \quad g: Y \supset D_g \rightarrow Z$$

Tw. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x} \in D_f$ (D_f – otwarty) i g jest różniczkowalna w punkcie $f(\mathbf{x})$, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $\mathbf{x} \in D_f$ i

$$(g \circ f)'(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x})) \circ f'(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x}))f'(\mathbf{x}).$$

Jeżeli f jest funkcją klasy C_D^1 i g jest funkcją klasy $C_{f[D]}^1$, to $g \circ f$ też jest klasy C_D^1 .

Dowód. (jak dla funkcji jednej zmiennej)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) = \\ &= g'(f(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) + r_1(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) = \\ &= g'(f(\mathbf{x}))(f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + r_2(\mathbf{x}, \mathbf{h})) + r_1(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) =\end{aligned}$$

$$= g'(f(\mathbf{x}))f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + g'(f(\mathbf{x}))r_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + r_1(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))$$

Trzeba pokazać, że $\|g'(f(\mathbf{x}))r_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + r_1(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))\| = o(\|\mathbf{h}\|)$ - dokładnie tak jak dla funkcji jednej zmiennej)

I przypadek szczególny (norma euklidesowa)

$$f: R^n \supset E \rightarrow R^m \quad f: \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad g: R^m \supset D \rightarrow R^k \quad g: \begin{cases} z_1 = g_1(y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ z_k = g_k(y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

$$\varphi = g \circ f: R^n \supset E \rightarrow R^k$$

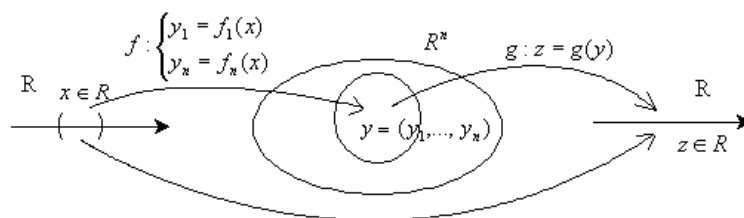
$$(g \circ f)'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{k \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(x)) \end{bmatrix}_{k \times m} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Dla przykładu

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$\text{Stąd } \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_p}(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) ; i=1, \dots, k; j=1, \dots, n$$

II-gi przypadek szczególny



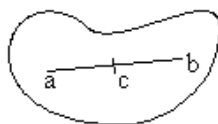
$$\varphi(x) = g(y_1(x), \dots, y_n(x)) \quad R \rightarrow R$$

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_n}(f(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_n(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x)) f'_i(x)$$

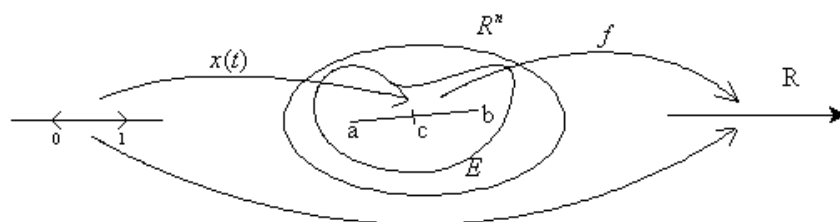
(dlatego „zwykłe” $f'_i(x)$, bo pochodne cząstkowe funkcji jednej zmiennej to „zwykłe” pochodne)

Uogólnienie twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej

Tw. Niech $f: R^n \supset D \rightarrow R$ (D – otwarty, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$, odcinek $\overline{\mathbf{ab}} \subset D$) będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie odcinka $\overline{\mathbf{ab}}$. Wówczas istnieje $\mathbf{c} \in \text{int } \overline{\mathbf{ab}}$ takie, że $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. [int – interior – wnętrze]



Dow. Parametryzujemy odcinek $\overline{\mathbf{ab}}$: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad t \in [0,1]$



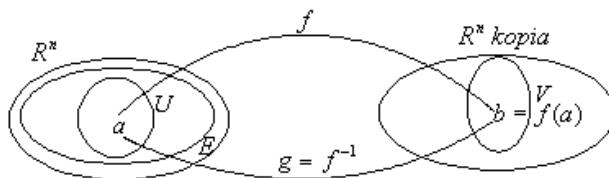
Funkcja $\varphi(t) = f(\mathbf{x}(t))$ jest funkcją $R \rightarrow R$ ciągłą na $[0,1]$ (jako złożenie funkcji ciągłych) oraz różniczkowalną w $(0,1)$, czyli spełnia założenia tw. Lagrange’a, więc

$$\begin{aligned} \varphi(1) - \varphi(0) &= \varphi'(\theta)(1-0) \quad \theta \in (0,1) \\ \parallel \qquad \parallel & \\ f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= f'(\mathbf{x}(\theta))(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \mathbf{x}(\theta) = \mathbf{c} \end{aligned} \quad \text{- tw. Lagrange’a dla } \varphi \text{ (jednej zmiennej)}$$

Tw.(o różniczkowaniu funkcji odwrotnej). Jeżeli $f: R^n \supset E \rightarrow R^n$ jest klasy C_E^1 (E – otwarty) oraz macierz $f'(\mathbf{a})$ jest odwracalna dla pewnego $\mathbf{a} \in E$, to wówczas istnieją zbiory otwarte $U \subset E \subset R^n$ i $V \subset R^n$ takie, że $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) \in V$ i $f: U \xrightarrow{1:1} V$ - bijekcja.

Ponadto funkcja g odwrotna do f (czyli $g = f^{-1}$) jest klasy C_V^1 oraz $g'(\mathbf{b}) = [f'(\mathbf{a})]^{-1}$ - macierz odwrotna.

Komentarz zamiast dowodu:



Istnienie zbiorów U, V i funkcji odwrotnej g wymaga dowodu np. z twierdzenia Banacha o punkcie stałym (Rudin str. 186). Wzór na pochodną jest natychmiastową konsekwencją tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej:

$$\begin{aligned} g[f(\mathbf{x})] &= \mathbf{x} \\ g'(f(\mathbf{x}))f'(\mathbf{x}) &= I_{n \times n} \quad / (f'(\mathbf{x}))^{-1} \\ g'(f(\mathbf{x})) &= (f'(\mathbf{x}))^{-1} \end{aligned}$$