

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Przykład Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ($x \cdot y \cdot z \neq 0$)

$$\text{WK: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4x^2 \Leftrightarrow y = 2x \vee y = -2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \Leftrightarrow (z^2 = y^2 \Rightarrow z = y \vee z = -y) \vee (z^2 = -y^2 \text{ sprz.}) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \wedge z = y \Rightarrow z = \pm 1 \\ y = 2x \wedge z = -y \Rightarrow z^2 = -1 \text{ sprz.} \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 = (\frac{1}{2}, 1, 1) \quad P_2 = (-\frac{1}{2}, -1, -1)$$

WW: budujemy macierz drugiej różniczki d^2f

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{bmatrix}$$

W punkcie P_1 macierz drugiej różniczki ma postać $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Z kryterium Sylwestera

(obliczamy minory) $(+, +, +) \rightarrow$ w P_1 jest minimum lokalne właściwe $f_{\min} = f(P_1) = 4$

dla $P_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ $(-, +, -)$ (ujemnie określona) $\rightarrow$ w P_2 jest $f_{\max} = f(P_2) = -4$

Ekstrema funkcji uwikłanych

Przykład (wprowadzający) Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $f(x, y) = 0$.

Zakładamy regularność funkcji f tak, aby wyliczone poniżej pochodne miały sens, czyli, że są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej.

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \Bigg/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{o ile} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

$$y(x) \text{ ma ekstremum w punkcie } x \Leftrightarrow (\text{z WK}) \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Otrzymaliśmy więc WK istnienia ekstremum funkcji uwikłanej

$$\text{WK: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Rozwiązujemy pierwszy układ i dostajemy punkty krytyczne } P_i, \\ \text{dla których sprawdzamy ostatni warunek.} \end{array}$$

Badanie rodzaju ekstremum może przebiegać za pomocą badania znaku $y'(x)$ w otoczeniu punktu krytycznego P_i lub badania znaku $y''(x)$. Pierwszy sposób jest nieco kłopotliwy. Nawet badanie znaku formy kwadratowej wymagało specjalnego narzędzia – kryterium Sylwestera (są też inne).

Różniczkując ponownie otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) &= 0 \quad \Bigg/ \frac{d}{dx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} y'(x) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'(x) \right) y'(x) + \frac{\partial f}{\partial y} y''(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} y'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y'(x))^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''(x) &= 0 \end{aligned}$$

w punktach krytycznych $y'(x) = 0$ więc

$$y''(x) = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} - \text{tylko w punkcie krytycznym}$$

$$y''(P_i) > 0 \Rightarrow y(x) \text{ ma w punkcie } x_i \text{ minimum lokalne właściwe } y(x_i) = y_i$$

Podobnie postępujemy wyznaczając ekstrema funkcji uwikłanej wielu zmiennych

Przykład. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $z(x, y)$ zadanej równaniem $f(x, y, z) = 0$.

Przypuścmy, że są spełnione odpowiednie założenia regularności (gwarantujące sens)

$$\begin{aligned} f(x, y, z(x, y)) &= 0 \quad \Bigg/ \frac{\partial}{\partial x} & f(x, y, z(x, y)) &= 0 \quad \Bigg/ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} & \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{punkty krytyczne } P_i(x_i, y_i, z_i)$$

WW: Badamy określoność macierzy drugiej różniczki $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix}$ w punktach krytycznych.

W celu wyliczenia powyższych pochodnych cząstkowych różniczkujemy jeszcze raz odpowiednie równania $\frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial z} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial z} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0$ po odpowiednich zmiennych. W punkcie krytycznym P_i dostajemy macierz liczbową

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{P_i}$$

i badamy jej określoność stosując kryterium Sylwestera. Jeżeli np. oba minory kątowe są dodatnie (++), to w punkcie $P_i(x_i, y_i)$ funkcja uwikłana $z(x, y)$ określona w otoczeniu P_i ma minimum lokalne właściwe równe z_i .

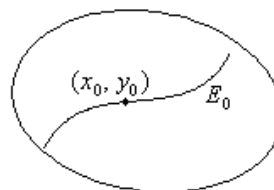
Przykładowe zadania z funkcji uwikłanych

- Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y(x)$ określonej równaniem
 - $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$.
 - $x^2 e^y - y^4 + 1 = 0$.
- W dostatecznie małym otoczeniu punktu $(1, y_0)$ narysować wykres funkcji uwikłanej $y(x)$ określonej równaniem $x^2 \ln y - y \ln x = 0$.

Ekstrema warunkowe

Np.: $f: R^2 \supset E \rightarrow R$ E – otwarty
 $g: R^2 \supset E \rightarrow R$ ciągła

Oznaczmy $E_0 = \{(x, y) \in E : g(x, y) = 0\}$
 i niech $(x_0, y_0) \in E_0$, czyli E_0 – niepusty.



Rozpatrzmy funkcję f obciętą do E_0 :

Ekstremum funkcji f obciętej do E_0 nazywać będziemy ekstreum warunkowym funkcji f pod warunkiem $g(x, y) = 0$

Def. Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne warunkowe właściwe

$$\Leftrightarrow \exists_{S(x_0, y_0)} \forall_{(x, y) \in S(x_0, y_0) \cap E_0} f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

Jak znaleźć ekstremum warunkowe? (wprowadzenie do metody Lagrange’a)

Zakładając, że równanie $g(x, y) = 0$ określa funkcję uwikłaną $y(x)$ problem sprowadza się do szukania ekstremum funkcji jednej zmiennej $\varphi(x) = f(x, y(x))$. Zakładając regularność

z WK istnienia ekstremum otrzymujemy $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = 0$,

a z warunku $g(x, y(x)) = 0 \quad \left/ \frac{d}{dx} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y'(x) = 0 \right.$ obliczamy $y'(x)$. Stąd otrzymujemy

$$\text{WK: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) = 0 \\ g(x, y(x)) = 0 \end{cases}$$

Można zauważyć, że równanie pierwsze WK jest wynikiem rugowania parametru λ z następującego

$$\text{układu równań: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ gdzie}$$

Lewe strony są pochodnymi cząstkowymi funkcji $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

$$\text{WK jest więc } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Badanie sprowadza się do badania funkcji Lagrange’a $L(x, y, \lambda)$ z mnożnikiem Lagrange’a λ . Metodę tę można uogólnić dla funkcji wielu zmiennych.

Metoda mnożników Lagrange’a

$$f : R^n \supset E \rightarrow R$$

$$\mathbf{g} : R^n \supset E \rightarrow R^m \quad m < n$$

$$E_0 = \{x \in E : \mathbf{g}(x) = \vec{0}\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in E : g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Szukanie ekstremum funkcji f pod warunkiem $\mathbf{g}(x)=0$

Algorytm: Tworzymy funkcję Lagrange’a

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{Warunek konieczny: } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \end{cases} \rightarrow P(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = P(x, \lambda)$$

Warunek wystarczający. traktując mnożniki λ jako parametry wyznaczyć w punktach krytycznych drugą różniczkę $d^2L((x, \lambda), \Delta x)_{P(x, \lambda)}$, przy czym przyrosty Δx spełniają układ równań $[\mathbf{g}'(x, \lambda)]_{m \times n} [\Delta x] = [0]$.

Wyznaczając m przyrostów jako funkcję $n-m$ pozostałych przyrostów badamy określoność $d^2L((x, \lambda), \Delta x)$ jako funkcję $n-m$ przyrostów, czyli formę kwadratową $n-m$ zmiennych, czyli badamy określoność macierzy tej formy.

Przykład Znaleźć ekstrema $f(x, y) = xy$ przy warunku $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

- I metoda rozwikływania ograniczeń:

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

$\tilde{f}(x) = f(x, 1-x) = x(1-x) = x - x^2$ $\tilde{f}$ ma w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ maksimum lokalne, więc f ma w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ma maksimum lokalne warunkowe

- II metoda Lagrange'a:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$$

$$\text{WK: } \left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow x + y - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = P_1$$

$$\text{WW: } d^2L((x, y, \lambda)(\Delta x, \Delta y)) = [\Delta x, \Delta y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$d^2L\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)(\Delta x, \Delta y)\right) = 2\Delta x \Delta y \text{ -(forma nieokreślona)}$$

Należy skrepić przyrosty $\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{P_1} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = 0$ czyli w punkcie P_1 mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \Delta x + \Delta y = 0 \Leftrightarrow \Delta y = -\Delta x$$

Wstawiamy uzyskaną zależność do drugiej różniczki $d^2 L((x, y, \lambda)(\Delta x, -\Delta x))_R = 2\Delta x(-\Delta x) = -2(\Delta x)^2$ otrzymując formę kwadratową (przyrostu Δx) ujemnie określonej. Wobec tego f ma w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ maksimum lokalne warunkowe.

Ekstrema globalne.

$$f : R^n \supset E \rightarrow R$$

Def: Funkcja f ma w $x^\circ \in E$ maksimum globalne właściwe $\Leftrightarrow \forall_{\substack{x \in E \\ x \neq x^\circ}} f(x) < f(x^\circ)$.

Jeżeli funkcja jest ciągła na zbiorze zwartym E , to z tw. Weierstrassa wynika, że istnieją w zbiorze E punkty, w których funkcja osiąga ekstrema globalne (kres górny i kres dolny zbioru swoich wartości)

Algorytm poszukiwania ekstremów globalnych:

1. poszukujemy punktów krytycznych w $\text{int } E$ (wnętrze):
 - punkty, w których zerują się pochodne cząstkowe
 - punkty, w których pochodne cząstkowe nie istnieją
2. „przeszukiwanie brzegu $g(x) = 0$ ” (szukamy punktów ekstremalnych funkcji przy warunku $g(x) = 0$)

W krokach 1 i 2 znajdujemy punkty krytyczne, w których funkcja może mieć ekstrema globalne. Jeżeli w wyniku tych poszukiwań otrzymamy skończoną ilość punktów, to wyznaczamy wartość funkcji w tych punktach i wybieramy największą i najmniejszą wartość.

Uwaga. Nie ma powodu, aby w punktach krytycznych sprawdzać, czy funkcja ma w tych punktach ekstrema lokalne czy warunkowe- nie stosujemy więc WW dla ekstremów lokalnych czy warunkowych, wystarczy ze skończonej listy wybrać wartość największą i najmniejszą.

Przykład. Znaleźć najmniejszą i największą) wartość funkcji $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste $x=0, y=0, x+y+3=0$.

Odp. $\text{Max} = f(-3,0)=f(0,-3)=6$ $\text{Min} = f(-1,-1)=-1$