

Całki podwójne i potrójne

Niech $\mathbf{r}:[\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ będzie **ciągłą** funkcją wektorową.

Def. Zbiór $K = \{\mathbf{r}(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ nazywamy **krzywą płaską**, a funkcję $\mathbf{r}$ nazywamy parametryzacją krzywej płaskiej. (inaczej **-krzywa, to ciągły obraz odcinka**)

Jeśli dodatkowo założymy, że $\mathbf{r}$ jest różnowartościowa, to K nazywamy **łukiem zwykłym**.

Jeśli parametryzacja $\mathbf{r}$ jest **różniczkowalna w sposób ciągły** (czyli $x(t), y(t) \in C^1_{[\alpha, \beta]}$) oraz $\forall t \in [\alpha, \beta] \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, to K nazywamy **łukiem gładkim**.

Def. Łuk regularny, to łuk zwykły i gładki.

Krzywa regularna, to krzywa dająca się podzielić na skończoną ilość łuków regularnych.

Krzywa zamknięta, to krzywa, dla której $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$.

Def. Obszar płaski $D \in \mathbb{R}^2$, to **otwarty i spójny** podzbiór płaszczyzny.

Brzeg obszaru, to zbiór jego punktów skupienia nie należących do obszaru.

Obszar domknięty, to obszar z brzegiem.

Obszar wielokątny, to obszar ograniczony skończoną liczbą łamanych.

Pole obszaru wielokątnego – intuicja (suma pól trójkątów na które można podzielić wielokąt)

Pole (miara Jordana) obszaru płaskiego

D – obszar **domknięty i ograniczony**

A – wielokąt zawarty w obszarze ($A \subset D$)

B – wielokąt nakrywający obszar ($B \supset D$)

$|A|$ – pole wielokąta A

$|B|$ – pole wielokąta B

$|A| \leq |B|$



Istnieją więc kresy: $|D_*| = \sup_{A \subset D, A \text{ wielokąt}} |A|$ i $|D^*| = \inf_{B \supset D, B \text{ wielokąt}} |B|$

Def. Jeżeli $|D_*| = |D^*|$, to obszar D nazywamy **mierzalnym w sensie Jordana**, a $|D| = |D_*| = |D^*|$ nazywamy jego **miarą Jordana**, czyli **polem**.

Dowodzi się, że prawdziwe są następujące warunki

Tw.(WKW mierzalności) Obszar płaski i ograniczony jest mierzalny w sensie Jordana $\Leftrightarrow$ brzeg da się pokryć **skończoną** liczbą wielokątów o dowolnie małym (sumarycznym) polu. Inaczej, brzeg musi być zawarty w wielokącie o dowolnie małym polu.

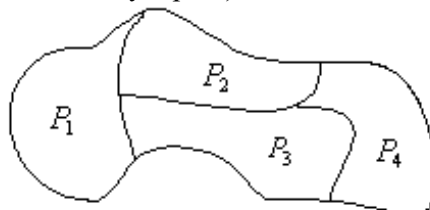
Tw.(WW mierzalności). Jeżeli obszar D jest ograniczony i jego brzeg jest sumą skończonej ilości krzywych ciągłych postaci $y = f(x)$ lub $x = g(y)$, to D jest mierzalny w sensie Jordana.

Tw.(WW mierzalności). Jeżeli obszar D jest ograniczony skończoną liczbą zamkniętych krzywych regularnych, to jest mierzalny w sensie Jordana.

Całka podwójna

Niech: $D \in R^2$ będzie **plaskim ograniczonym obszarem domkniętym o brzegu będącym krzywą zamkniętą o polu zero** (czyli można ją nakryć wielokątem o dowolnie małym polu)

Dzielimy obszar D skończoną ilością krzywych o polu zero na obszary $P_1, \dots, P_n$ o rozłącznych wnętrzach uzyskując podział $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ $D = P_1 \cup \dots \cup P_n$
 $i \neq j \Rightarrow \text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$



Przez $|P_i|$ oznaczać będziemy pole obszaru P_i .

Średnicą zbioru $A \subset X$ (X -przestrzeń unormowana) nazywamy: $d(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\| = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$.

Średnicą podziału $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę $d(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} d(P_i)$.

Niech $f: R^2 \supset D \rightarrow R^2$. Wybierając w każdym zbiorze P_i punkt $(x_i, y_i) \in P_i$ tworzymy sumę

$$\sigma(f, \mathcal{P}, (x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot |P_i|.$$

Def. Liczbę rzeczywistą I nazywamy całką podwójną funkcji f po obszarze D gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathcal{P} \forall (x_i, y_i)_{i=1, \dots, n} d(\mathcal{P}) \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) |P_i| - I \right| \leq \varepsilon \quad \text{i} \quad \text{oznaczamy}$$

$$I \stackrel{df}{=} \iint_D f(x, y) dP = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot |P_i|$$

Def. (typu Heinego) Liczbę rzeczywistą I nazywamy całką podwójną funkcji f po obszarze D jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów $\mathcal{P}_n$ ciąg odpowiadających sum całkowych σ_n zbiega do I niezależnie od wyboru punktów „pośrednich”.

Podobnie jak w przypadku pojedynczej całki Riemanna można zdefiniować sumy Darboux górną $S(f, \mathcal{P})$ i dolną $s(f, \mathcal{P})$ oraz ich kresy – całki górną i dolną. Pojęcia te pozwalają łatwo wykazać następujące warunki całkowalności:

WKW f jest całkowalna na $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P} : S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$

WK Jeżeli funkcja określona na ograniczonym obszarze jest całkowalna, to jest ograniczona.

WW Jeżeli funkcja jest ciągła w D , to jest całkowalna.

WW Jeżeli funkcja jest ograniczona na D i ma nieciągłości na skończonej liczbie krzywych o polu zero, to funkcja ta jest całkowalna na D .

Własności całki

1. Jeżeli funkcja jest całkowalna na D i zmienimy ją dowolnie z zachowaniem ograniczoności wzdłuż krzywej o polu równym zero, to otrzymana funkcja jest także całkowalna i całki obu funkcji są równe.

2. Jeżeli obszar D podzielmy krzywą o polu zero na obszary D_1 i D_2 , to funkcja jest całkowalna na $D \Leftrightarrow$ funkcja ta jest całkowalna na D_1 i D_2 oraz

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$
3. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na D i $k \in \mathbb{R}$, to funkcja (kf) też jest całkowalna na D i

$$\iint_D kf(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy.$$
4. Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na D , to $f + g$ też jest całkowalna na D i

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy.$$
5. Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na D , i $f(x, y) \leq g(x, y)$ na D , to wówczas

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$
6. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na D , to $|f|$ też jest całkowalna na D i

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$
7. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na D , i $m \leq f(x, y) \leq M$, to $m|D| \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M|D|$,
czyli istnieje $\mu = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) dx dy$ - wartość średnia funkcji f na zbiorze D .
8. Jeżeli funkcja f jest ciągła na D (**zwartym i spójnym**), to $\exists_{(x^*, y^*) \in D} : \mu = f(x^*, y^*)$ - czyli istnieje punkt, w którym f przyjmuje wartość średnią, czyli $\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi^*, \eta^*)|D|$.

Obliczanie całek podwójnych

Tw.(o zamianie całki podwójnej na iterowaną – wariant dla prostokąta) Jeżeli

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz
- $\forall_{x \in [a, b]}$ istnieje $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$,

to funkcja $I(x) \in R([a, b])$ i $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ (całka iterowana - całka z całki).

Dowód. Z założonej całkowalności funkcji f na prostokącie P wynika, że możemy podzielić prostokąt P na nm prostokątów dzieląc przedział $[a, b]$ na n przedziałów a przedział $[c, d]$ na m przedziałów tak, aby sumy górna i dolna różniły się dowolnie mało. Oznaczmy przez

$$M_{ij} = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y); \quad m_{ij} = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y). \text{ Wówczas dla dowolnego}$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ mamy } I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy = \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy. \text{ Z twierdzenia o wartości średniej dla}$$

całki Riemanna mamy $m_{ij}\Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_j, \quad j=1, \dots, m.$ Wobec tego

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j \leq I(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j.$$

Mnożąc każdą z tych nierówności przez Δx_i i sumując po i otrzymujemy

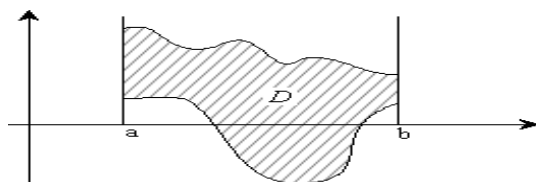
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n \left[\int_c^d f(\xi_i, y)dy \right] \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

Gdy średnica podziału zmierza do 0, to skrajne sumy zmierzają do $\iint_P f(x, y)dx dy$ a środkowa do

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$$

Uogólnienie

Niech $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \varphi, \psi - \text{ciągłe}\}$ będzie **trapezem krzywoliniowym**



Def. Obszar normalny względem osi OX , to obszar, którego rzut na oś OX jest przedziałem $[a, b]$ i każdy przekrój prostą $x=x_0, x_0 \in [a, b]$ jest przedziałem $[\varphi(x), \psi(x)]$

Tw.(w wersji dla obszaru normalnego) Jeżeli

- $f : D \rightarrow R$ jest całkowalna na D oraz
- $\forall_{x \in [a, b]}$ istnieje $I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$

to funkcja $I(x) \in R([a, b])$ i $\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right] dx.$

Dow. Obszar D można nakryć prostokątem P (bo D – ograniczony) $P \supset D$

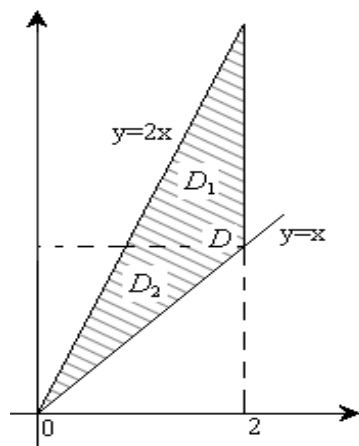
$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in P \setminus D \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \iint_P f^*(x, y)dx dy \dots, \text{ (bo można podzielić obszar } P \text{ na 3 obszary, przy czym w}$$

dwóch z nich funkcja f^* jest zerem i stosujemy poprzednie twierdzenie:

$$\dots = \int_a^b \left[\int_c^{\varphi(x)} f^*(x, y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x, y)dy + \int_{\psi(x)}^d f^*(x, y)dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

Przykład. Zmienić kolejność całkowania

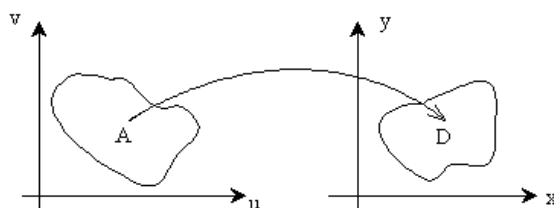


$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[\int_x^{2x} f(x, y) dy \right] dx &= \iint_D f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \dots \\ &\quad y = x \rightarrow x = y \\ &\quad y = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}y \\ &= \dots \int_0^2 \left[\int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx \right] dy + \int_2^4 \left[\int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

Jeżeli obszar nie jest normalny, to dzielimy go na skończoną liczbę obszarów normalnych i dodajemy całki.

Zmiana zmiennych w całce podwójnej

Funkcja wektorowa: $T := \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \Delta - \text{otwarty, spójny.}$



Założmy, że T jest różniczkowalna w Δ (czyli istnieją ciągle pochodne cząstkowe w Δ)

i jacobian: $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \stackrel{df}{=} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ w } \Delta.$

Przy powyższych założeniach można dowieść, że **T przekształca obszar na obszar i łuk zwykły na łuk zwykły.**

Niech Δ , D będą domkniętymi **obszarami regularnymi** (dające się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych).

$$T := \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad \text{odwzorowuje obszar regularny } \Delta \text{ na obszar regularny } D.$$

Ponadto $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ - ciągła (więc ograniczona z ograniczoności obszaru)

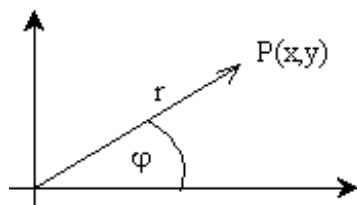
Tw. Jeżeli

- 1° T jest klasy C^1 w obszarze nakrywającym Δ
- 2° $T: \text{int } \Delta \rightarrow D$ jest różnowartościowa (T nie musi być różnowartościowa na brzegu Δ)
- 3° $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ w $\text{int } \Delta$
- 4° $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na D (więc także ograniczona)

to:

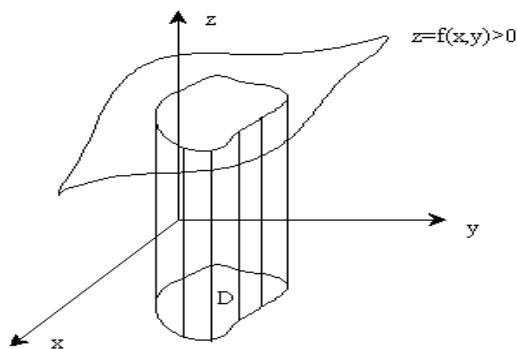
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

Transformacja biegunowa



$$T_B = \begin{cases} x = r \cos \varphi & 0 \leq r \leq \infty \\ y = r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \quad (J \neq 0 \text{ dla } r \neq 0)$$



$$V = \{(x,y,z) : x,y \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

$$|V| = \iint_D f(x,y) dx dy$$

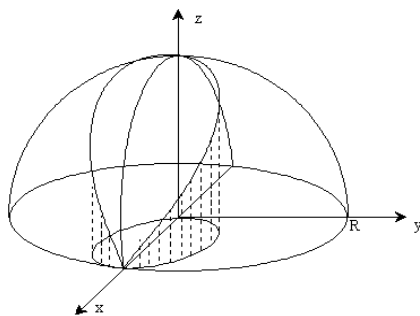
Przykład Obliczyć objętość bryły wyciętej walcem z kuli

Walec: $x^2 + y^2 = Rx \Leftrightarrow (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = (\frac{R}{2})^2$

Kula: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

Bryła

Vivaniego:



- górna

połówka

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right\} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\varphi = \dots \\
 &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R \cos \varphi} d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{2}{9} R^3 (3\pi - 4).
 \end{aligned}$$

Jak obliczyć zbieżną całkę niewłaściwą $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{x-m}{\sigma} \\ dx = \sigma du \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$?

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} du dv = \left\{ \begin{array}{l} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \left\{ t = \frac{r^2}{2} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1
 \end{aligned}$$

Stąd $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$; $\forall m \forall \sigma > 0$.

Podobnie $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \{t = x^2\} = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

gdyż

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{[0,\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{\pi}{4},$$

a stąd $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Całki potrójne

Miara Jordana -objętość-obszaru przestrzennego) $V \subset \mathbb{R}^3$

Podobnie jak dla obszaru płaskiego definiujemy obszar wielościenny – obszar ograniczony skończoną liczbą płaszczyzn i powtarzamy poprzednią konstrukcję.

Tw. (WKW mierzalności objętościowej) Obszar przestrzenny $V \subset \mathbb{R}^3$ jest mierzalny w sensie Jordana $\Leftrightarrow$ brzeg da się pokryć skończoną ilością wielościannów o dowolnie małej (sumarycznej) objętości.

Tw. (WW mierzalności objętościowej) Jeżeli $V \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczony skończoną liczbą powierzchni $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ lub $x = h(y, z)$, (f, g, h – ciągle określone na zbiorze ograniczonym), to V jest mierzalny.

Tw. (WW mierzalności objętościowej) Jeżeli $V \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczony skończoną liczbą powierzchni gładkich o równaniach

$$S: \mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} \quad (u, v) \in D - \text{obszar domknięty i ograniczony i rząd } (\mathbf{r}'(u, v)) = \text{rząd} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2, \text{ bez punktów wielokrotnych, to } V \text{ jest mierzalny.}$$

Niech $f: \mathbb{R}^3 \supset V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na **ograniczonym** obszarze **domkniętym** V o **brzegu miary Jordana 0**, (czyli na obszarze mającym objętość). Podobnie jak w konstrukcji całki podwójnej dzielimy obszar V powierzchniami o objętości 0 na obszary $V_1, \dots, V_n$ uzyskując podział P oraz tworzymy analogiczną sumę całkową:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) |V_i| \quad \text{i jej granicę o ile istnieje}$$

w uproszczeniu: $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{dP \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) |V_i|$

WK i WW całkowalności oraz własności całki potrójnej są analogiczne do przypadku całki podwójnej (zastępując: krzywa – powierzchnia, zbiór płaski – zb. przestrzenny)

Zamiana całki potrójnej na iterowaną

Tw: (wersja A dla prostopadłościanu $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$) . Jeżeli

- $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna na V
- $\forall_{x \in [a, b]} \quad I(x) = \iint_{[c, d] \times [e, f]} f(x, y, z) dy dz$ istnieje,

$$\text{to } I(x) \in R([a, b]) \text{ i } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{[c, d] \times [e, f]} f(x, y, z) dy dz \right] dx.$$

Tw. (wersja B dla prostopadłościanu $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$). Jeżeli

- $f : V \rightarrow R$ jest całkowalna na V
- $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \quad I(x, y) = \int_e^f f(x, y, z) dz$ istnieje,

$$\text{to } I(x, y) \text{ jest całkowalna na } [a, b] \times [c, d] \text{ i } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \left[\int_e^f f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

Uogólnienie powyższych twierdzeń.

V – obszar jak w definicji całki potrójnej (ograniczony powierzchniami o mierze 0)

T – prostopadłościan nakrywający V ($V \subset T$)

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y, z) \in V \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) \in T \setminus V \end{cases}$$

$$\text{Z własności całki otrzymujemy równość } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

Oznaczmy: $P_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in V\}$ – przekrój obszaru płaszczyzną prostopadłą do osi X .

Tw. (wersja A dla obszaru zawartego między płaszczyznami $x = a$ i $x = b$). Jeżeli

- $f : V \rightarrow R$ jest całkowalna na V
- $\forall_{x \in [a, b]} \quad I(x) = \iint_{P_x} f(x, y, z) dy dz$ istnieje, to $I(x) \in R([a, b])$ i

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{P_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx.$$

$D = \{(x, y) : \exists z : (x, y, z) \in V\}$ – rzut obszaru przestrzennego V na płaszczyznę XY .

$P_{(x, y)} = \{z : (x, y, z) \in V\}$ – przekrój obszaru V prostą równoległą do osi Z wystawioną w punkcie (x, y)

Tw. (wersja B dla ogólnego obszaru). Jeżeli

- $f : V \rightarrow R$ jest całkowalna na V
- $\forall_{(x, y) \in D} \quad I(x, y) = \int_{P_{(x, y)}} f(x, y, z) dz$ istnieje,

$$\text{to } I(x, y) \text{ jest całkowalna na } D \text{ i } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{P_{(x, y)}} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

$$\text{Np. } V : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \\ A(x, y) \leq z \leq B(x, y) \end{cases} \quad \varphi, \psi, A, B - \text{ciągłe}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{A(x, y)}^{B(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx$$

Zamiana zmiennych w całce potrójnej

Tw. Jeżeli

$$1^\circ \text{ transformacja } T = \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \text{ jest klasy } C^1 \text{ w obszarze obejmującym } \Omega$$

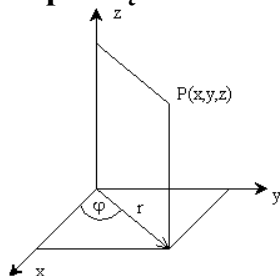
2° $T : \text{int } \Omega \rightarrow V$ jest różnowartościowa (T nie musi być różnowartościowa na brzegu Ω)

$$3^\circ J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ w } \text{int } \Omega$$

4° $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ - ciągła (więc ograniczona)

$$\text{to } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

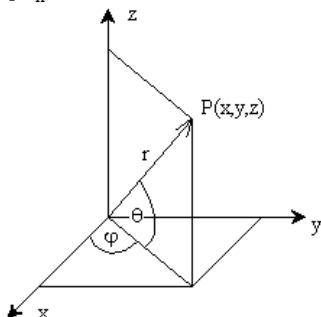
Współrzędne walcowe i sferyczne



(r, φ, z) - współrzędne walcowe

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = r$$



(r, φ, θ) - współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi & 0 \leq r < \infty \\ y = r \cos \theta \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r \sin \theta & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$J = r^2 \cos \theta$$

Zastosowania całek

- Objętość obszaru $|V| = \iiint_V dx dy dz$
- Masa bryły o gęstości $\rho(x, y, z)$ $m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$
- Pole powierzchni określonej równaniem parametrycznym $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$; $(u, v) \in D$

$$|S| = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

W szczególności jeżeli płat jest wykresem funkcji : $z = f(x, y)$, to

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad \vec{r}_u = \left[1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right] \quad \vec{r}_v = \left[0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right]$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right] \quad |S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2} du dv$$

- Momenty statyczne i współrzędne środka masy

np. $MS_{xy} = \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz$, $z_C = \frac{MS_{xy}}{m}$ itd.

- Momenty bezwładności np. $I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$

$$I_{Oxy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- i wiele innych