

Całka krzywoliniowa nieskierowana

Niech K będzie płaskim lub przestrzennym łukiem gładkim o parametryzacji:

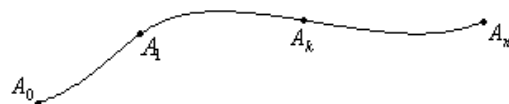
$$K: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (\text{wektorowo } \vec{r} = \vec{r}(t); \alpha \leq t \leq \beta)$$

Uwaga: Założenie gładkości ($x(t), y(t), z(t) \in C^1_{[\alpha, \beta]}$) gwarantuje **prostowalność** łuku (prostowalny, tzn. posiada długość)

Oznaczenia

- $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, gdzie $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ oznacza **podział odcinka** $[\alpha, \beta]$ na n podprzedziałów.
- $d(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$ średnia podziału

Podział $\mathcal{P}$ indukuje podział krzywej punktami $A_k = \vec{r}(t_k)$



- w każdym z przedziałów $[t_{k-1}, t_k]$ wybieramy punkt pośredni $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ $k = 1, \dots, n$.

Punktom t_k^* odpowiadają punkty A_k^* na krzywej.

Oznaczmy przez $\Delta l_k = \Delta r_k$ długość łuku $A_{k-1}A_k$.

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\vec{r}'(t)| dt$$

Niech f będzie funkcją ograniczoną na łuku gładkim K .

Def. Całkę krzywoliniową nieorientowaną funkcji f po łuku K definiujemy (niezbyt precyzyjnie)

$$\text{wzorem: } \int_K f(x, y, z) dl = \lim_{d(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(A_k^*) \Delta l_k = \lim_{d(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(t_k^*)) \Delta r_k \quad \text{o ile granica powyższa jest}$$

skończona i nie zależy od podziału $\mathcal{P}$ i od wyboru punktów pośrednich.

$$\text{Dokładniej: } I = \int_K f(x, y, z) dl \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta \forall \mathcal{P} \forall \{t_k^*\} \quad d(\mathcal{P}) \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(t_k^*)) \Delta r_k - I \right| \leq \varepsilon.$$

Z definicji całki krzywoliniowej nieskierowanej i z własności granic otrzymujemy następujące własności (przy założeniu istnienia odpowiednich całek):

- $\int_K (f + g) dl = \int_K f dl + \int_K g dl$
- $\int_K (cf) dl = c \int_K f dl \quad c \in \mathbb{R}$

- $K = K_1 \cup \dots \cup K_m \Rightarrow \int_K f dl = \sum_{i=1}^m \int_{K_i} f dl$, $K_1, \dots, K_m$ - łuki gładkie

Tw. (o zamianie całki krzywoliniowej nieskierowanej na całkę Riemanna)

Niech: f będzie funkcją **ciągłą** na **łuku gładkim** K o parametryzacji $\vec{r} = \vec{r}(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$.

Wówczas
$$\int_K f(\vec{r}) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

W szczególności dla $n=3$ (przypadek krzywej przestrzennej) mamy

$$\int_K f(\vec{r}) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

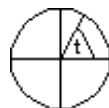
Równania parametryczne niektórych łuków:

1. Odcinek o końcach $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

2. Okrąg o środku $S(x_0, y_0)$ i promieniu R

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos t \\ y(t) = y_0 + R \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



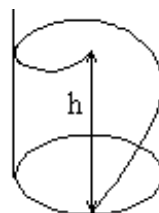
3. Elipsa o środku $S(x_0, y_0)$ i półosiach a, b

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + a \cos t \\ y(t) = y_0 + b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



4. linia śrubowa o skoku k nawinięta na walec

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos t \\ y(t) = y_0 + R \sin t \\ z(t) = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$



Zadanie. Sparametryzować krzywą Vivianiego

Przykład. obliczyć $\int_K x^2 y dl$, gdzie K – część okręgu $x^2 + y^2 = 4$ w I-szej ćwiartce

- I parametryzacja:
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_K x^2 y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^2 t \sin t \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \cos^2 t \sin t dt = \frac{16}{3}$$

- II parametryzacja:
$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4-t^2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\int_K x^2 y dl = \int_0^2 t^2 \sqrt{4-t^2} \sqrt{1^2 + \left(\frac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}\right)^2} dt = 2 \int_0^2 t^2 dt = \frac{16}{3}$$

Zastosowania

- masa łuku materialnego o gęstości liniowej $\rho(x, y, z)$ $m = \int_K \rho(z, y, z) dl$

- momenty statyczne i współrzędne środka masy łuku materialnego

$$M_{xOy} = \int_K z \rho(z, y, z) dl \quad M_{xOz} = \int_K y \rho(z, y, z) dl \quad M_{yOz} = \int_K x \rho(z, y, z) dl$$

$$\text{środek masy } x_c = \frac{M_{yOz}}{m} \quad y_c = \frac{M_{xOz}}{m} \quad z_c = \frac{M_{xOy}}{m}$$

- natężenie pola grawitacyjnego wytworzonego przez łuk materialny
- natężenie pola elektrostatycznego wytworzonego przez łuk materialny naelektryzowany

$$\text{ładunkiem o gęstości liniowej } \lambda: \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \lambda(\vec{r}) d\vec{r}$$

Całka krzywoliniowa skierowana (zorientowana)

Jeżeli na łuku K określono początek i koniec (czyli kierunek) to łuk nazywamy **zorientowanym**. Łuk o orientacji przeciwnej do K będziemy oznaczać: $-K$. Jeżeli ze wzrostem parametru poruszamy się po łuku zgodnie z orientacją, to **parametryzację nazwiemy zgodną z orientacją**.

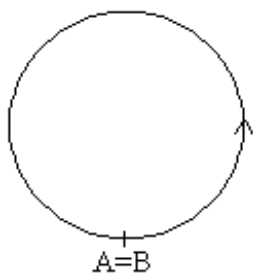


$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$r(\alpha) = A \text{ początek}$$

$$r(\beta) = B \text{ koniec}$$

} parametryzacja zgodna



Powyższy sposób rozróżnienia orientacji nie stosuje się do krzywych zamkniętych, gdyż początek krzywej zamkniętej pokrywa się z jej końcem

Umowa. Orientację płaskiej krzywej zamkniętej uznajemy za dodatnią jeżeli poruszając się po krzywej zgodnie z orientacją mamy wewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywą po lewej stronie (inaczej - przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)

Płaskie pole wektorowe w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ to funkcja wektorowa

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Przestrzenne pole wektorowe w obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$ to funkcja wektorowa

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Jeżeli składowe P, Q, R są ciągłe, to pole wektorowe nazywamy **ciągłym**, a jeżeli składowe P, Q, R mają ciągłe pochodne cząstkowe, to pole nazywamy **różniczkowalnym w sposób ciągły** (klasy C^1).

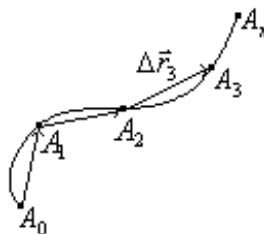
Oznaczenia

- K – łuk zorientowany o parametryzacji $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ zgodnej z orientacją.
- $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ - podział,
- $d(\mathcal{P})$ - średnica podziału
- $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ $k = 1, \dots, n$ - punkty pośrednie

$$A_i = \vec{r}(t_i) \quad i = 0, \dots, n,$$

$$A_k^* = \vec{r}(t_k^*), \quad k = 1, \dots, n$$

- $\Delta \vec{r}_k = \vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})$



Def. Niech $\vec{F}$ będzie płaskim lub przestrzennym polem wektorowym na łuku zorientowanym K .

Całka krzywoliniowa zorientowana (skierowana) pola wektorowego $\vec{F}$ po łuku zorientowanym K definiujemy wzorem:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} \stackrel{df}{=} \lim_{d(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_k^*)) \circ \Delta \vec{r}_k$$

o ile granica jest skończona i nie zależy od podziału $\mathcal{P}$ wyboru punktów pośrednich.

Po rozpisaniu na współrzędne mamy dla

$$n=2 \quad \int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \vec{F} = (P, Q) \quad d\vec{r} = (dx, dy)$$

$$n=3 \quad \int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_K P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad , \quad \vec{F} = (P, Q, R) \quad , \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

Interpretacja fizyczna

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} - \text{praca pola } \vec{F} \text{ (zmiennej siły) na drodze } K.$$

Własności (z definicji całki i granic – przy założeniu istnienia całek):

- $\int_K (\vec{F} + \vec{G}) \circ d\vec{r} = \int_K \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_K \vec{G} \circ d\vec{r}$

- $\int_K (c\vec{F}) \circ d\vec{r} = c \int_K \vec{F} \circ d\vec{r}$
- $\int_{-K} \vec{F} \circ d\vec{r} = - \int_K \vec{F} \circ d\vec{r}$
- $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ przy czym koniec K_{i-1} = początek K_i

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{K_i} \vec{F} \circ d\vec{r}$$

Tw. (o zamianie całki krzywoliniowej zorientowanej na całkę Riemanna). Jeżeli **pole wektorowe** $\vec{F}$ jest **ciągłe** na zorientowanym **łuku gładkim** K o parametryzacji $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ zgodnej z

$$\text{orientacją, to } \int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \circ \vec{r}'(t) dt.$$

Po rozpisaniu na współrzędne mamy

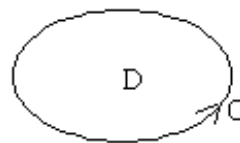
$$n=2 \quad \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

$$\begin{aligned} n=3 \quad & \int_K P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

Tw. (Greena dla $n = 2$ przypadek płaski, będzie uogólnienie dla $n=3$ - tw. Stokesa)

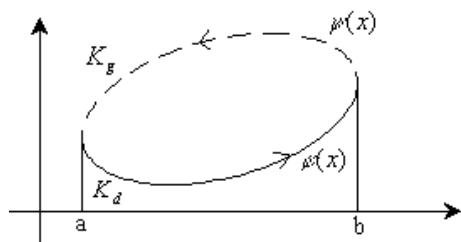
Jeżeli funkcje P i Q są klasy C^1 w obszarze D normalny względem obu osi, którego brzegiem jest krzywa C skierowana dodatnio względem wnętrza, to

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$



Dow (szkie):

$$\text{Wystarczy pokazać, że } \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_C P dx \text{ oraz } \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_C Q dy$$

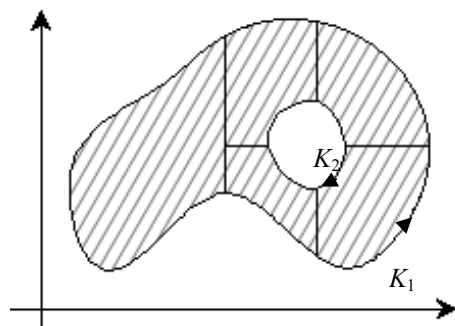


K_g - górna krzywa

K_d - dolna krzywa

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))) dx = \\ &= \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx = \int_{-K_g} P(x, y) dx - \int_{K_d} P(x, y) dx = - \int_C P dx \end{aligned}$$

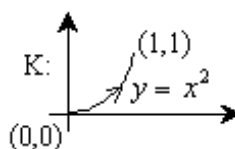
Twierdzenie Greena pozostaje prawdziwe dla obszarów jednospójnych i wielospójnych dających się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych.



Po dzielących łukach całkujemy dwa razy w różne strony, czyli w efekcie całki zniosą się. W efekcie tego otrzymamy

$$\int_{K_1 \cup K_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

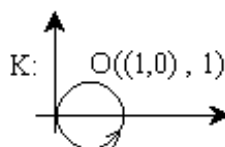
Przykład. Obliczyć $\int_K \sqrt{xy} dx + x dy$



łuk paraboli $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_K \sqrt{xy} dx + x dy = \int_0^1 (\sqrt{t \cdot t^2} \cdot 1 + t \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^{\frac{3}{2}} + 2t^2) dt = \frac{16}{3}$$

Przykład. Obliczyć $\int_K xy^2 dx - x^2 y dy$



- I sposób (zamiana całki krzywoliniowej na całkę pojedynczą):

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t) \sin^2 t (-\sin t) - (1 + \cos t)^2 \sin t \cos t] dt = 0$$

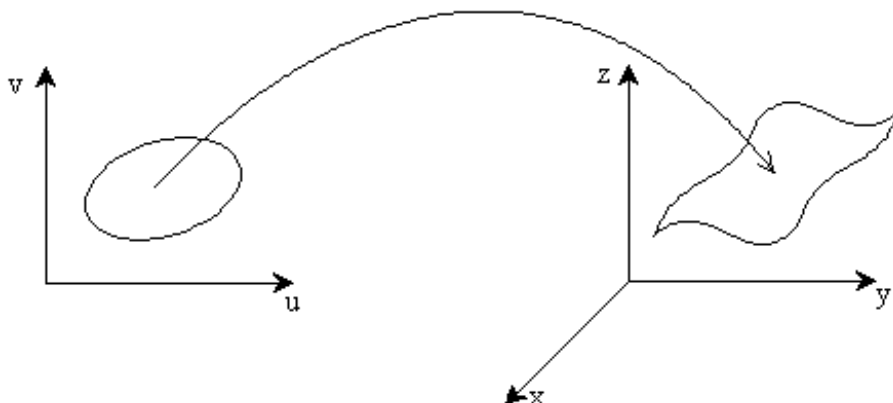
- II sposób (z tw. Greena)

$$\int_K xy^2 dx - x^2 y dy = \iint_D (-2xy - 2xy) dx dy = -4 \iint_D xy dx dy = 0$$

Uwaga . (ciekawe zastosowanie wzoru Greena). Jeżeli we wzorze Greena przyjmiemy $P(x, y) = -\frac{1}{2} y$ a $Q(x, y) = \frac{1}{2} x$ to otrzymamy $\frac{1}{2} \int_K -y dx + x dy = |D|$ - pole obszaru ograniczonego krzywą K. Fakt ten znalazł zastosowanie w planimetrze Amslera.

Całki powierzchniowe

Rozważmy funkcję wektorową $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$



Niech

- D – prostokąt domknięty (lub obszar domknięty jednospójny)
- funkcja wektorowa $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ $(u, v) \in D$ ciągła i różnowartościowa

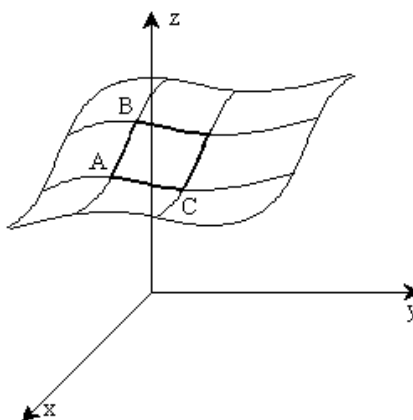
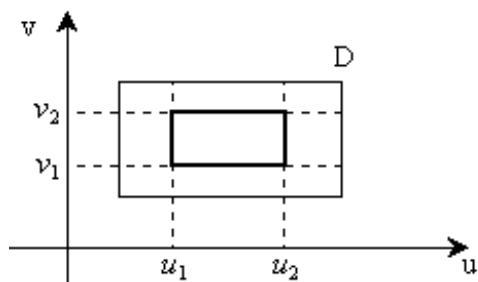
Def. Płatem powierzchniowym prostym nazywamy zbiór $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$. Funkcję wektorową $\vec{r}(u, v)$ nazywamy parametryzacją płata

Def. Zbiór S w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taki, że każdy jego punkt $x \in S$ ma otoczenie domknięte (czyli zbiór $\overline{K}(x, r) \cap S$), które jest płatem prostym, nazywamy płatem powierzchniowym.

Def. Płat powierzchniowy $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$, gdzie D – obszar domknięty z brzegiem kawałkami gładkim (różniczkowalnym), a funkcja wektorowa (parametryzacja) $\vec{r}(u, v)$ jest różnowartościowa i różniczkowalna w sposób ciągły na D nazywamy **gładkim płatem powierzchniowym**, gdy na zbiorze D jest spełniony warunek:

$$\forall_{u, v \in D} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$$

INTERPRETACJA $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$



$$A = \vec{r}(u_1, v_1)$$

$$B = \vec{r}(u_1, v_2)$$

$$C = \vec{r}(u_2, v_1)$$

$$\vec{r}(u_2, v_1) - \vec{r}(u_1, v_1) \approx \vec{r}_u(u_1, v_1)(u_2 - u_1) \quad (\text{z wzoru Taylora})$$

$$\vec{r}(u_1, v_2) - \vec{r}(u_1, v_1) \approx \vec{r}_v(u_1, v_1)(v_2 - v_1)$$

$$[\vec{r}(u_2, v_1) - \vec{r}(u_1, v_1)] \times [\vec{r}(u_1, v_2) - \vec{r}(u_1, v_1)] \approx (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$d\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \quad \text{- wektor (wektor jednostkowy) normalny}$$

$$dS = \|d\vec{S}\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Przypomnienie: pole płata $|S| = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$

W szczególności jeżeli płat jest wykresem funkcji : $z = f(x, y)$, to

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad \vec{r}_u = \left[1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right] \quad \vec{r}_v = \left[0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right]$$

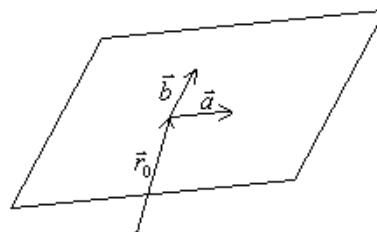
$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right] \quad |S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} du dv$$

Równania parametryczne ważniejszych płatów

a) płaszczyzna przechodząca przez punkt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ rozpięta na wektorach

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \quad \text{i} \quad \vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x \\ y = y_0 + ua_y + vb_y \\ z = z_0 + ua_z + vb_z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

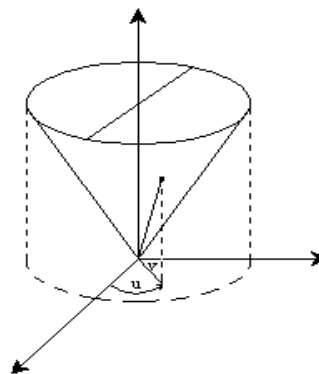


b) sfera o środku w $(0,0,0)$ i promieniu R

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v \\ y = R \sin u \cos v \\ z = R \sin v \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{matrix} \quad R = \text{const}$$

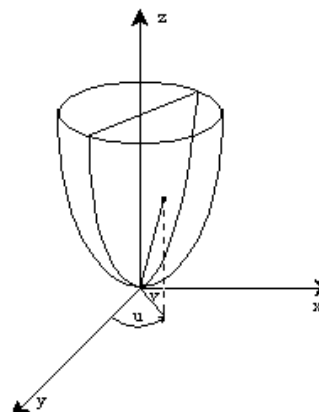
c) stożek $z = k\sqrt{x^2 + y^2} \quad k > 0$

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = kv \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, \infty) \end{matrix}$$



d) paraboloida $z = k(x^2 + y^2) \quad k > 0$

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = kv^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, \infty) \end{matrix}$$



e) walec $x^2 + y^2 = R^2 \quad 0 \leq z \leq H$

$$\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \sin u \\ z = v \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, H] \end{matrix}$$

Całka powierzchniowa nieorientowana

Oznaczenia

- $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$ - gładki płat powierzchniowy
- $\mathcal{P} = \{\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n\}$ - podział obszaru D na obszary regularne o rozłącznych wnętrzach
- $d_k = \sup_{A, B \in \Delta D_k} d(A, B)$ - średnica zbioru ΔD_k
- $d(\mathcal{P}) = \max \{d_k : 1 \leq k \leq n\}$ - średnica podziału
- $\Theta = \{(u_1^*, v_1^*), \dots, (u_n^*, v_n^*)\} \quad (u_k^*, v_k^*) \in \Delta D_k$ „punkty pośrednie”
- ΔS_k - część płata odpowiadająca ΔD_k , $|\Delta S_k|$ - pole ΔS_k

Def. Niech f będzie funkcją ograniczoną na gładkim płacie S . Całkę powierzchniową nieorientowaną funkcji f po płacie S definiujemy wzorem:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f(\vec{r}) dS = \lim_{d(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\vec{r}(u_k^*, v_k^*)) |\Delta S_k|$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona i nie zależy od podziału $\mathcal{P}$ i wyboru punktów pośrednich.

Uwaga. Wartość całki nie zależy od wyboru parametryzacji.

Zastosowania

- Masa płata materialnego o gęstości powierzchniowej $\rho(x, y, z)$

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

- Momenty statyczne, momenty bezwładności, współrzędne środka masy płata materialnego.
- Natężenie pola elektrostatycznego (lub grawitacyjnego) wytworzonego przez ładunek

$$\text{umieszczony na płacie o gęstości } \sigma(x, y, z) \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3} \sigma(\vec{r}) dS.$$

Własności

- $\iint_S (f + g) dS = \iint_S f dS + \iint_S g dS$
- $\iint_S (cf) dS = c \iint_S f dS, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\iint_{S_1 \cup \dots \cup S_n} f dS = \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} f dS$

Tw.(o zamianie całki powierzchniowej nieorientowanej na całkę podwójną). Jeżeli f jest funkcją ciągłą na gładkim płacie powierzchniowym $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$, D – regularny (domknięty,

o brzegu kawałkami gładkim), to $\iint_S f dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$.

Przykład. Znaleźć siłę z jaką jednorodna powierzchnia boczna części stożka ściętego

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in (0, \pi), \quad r \in (b, a) \\ z = r \end{cases}$$

przyciąga punkt materialny o masie m umieszczony w początku układu współrzędnych.

$$\textbf{Rozwiązanie.} \quad dF_y = \frac{G m \rho dS}{R^2} \frac{y}{R}, \quad dF_z = \frac{G m \rho dS}{R^2} \frac{z}{R}, \quad F_x = 0 \quad (\text{symetria}) \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F_y = \rho \iint_S \frac{G m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS = \int_0^\pi \int_b^a \frac{G m \rho}{r^3} \frac{r \sin \varphi}{r} \sqrt{2} r dr d\varphi = G m \rho \ln \frac{a}{b}$$

$$\text{Podobnie } F_z = \rho \iint_S \frac{G m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS = \frac{G m \rho}{2^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi \int_b^a \frac{r}{r^3} \sqrt{2} r dr d\varphi = \frac{1}{2} G m \rho \pi \ln \frac{a}{b}$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad , \quad |\vec{F}| = G m \rho \ln \frac{a}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Całka powierzchniowa zorientowana

Płat powierzchniowy, na którym wyróżniono jedną stronę (zwaną dodatnią) nazywać będziemy **platem powierzchniowym zorientowanym**.

Przyjmujemy, że wektor normalny $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ zorientowany jest od strony ujemnej do dodatniej).

Uwaga. Nie każdą powierzchnię można zorientować- **wstęga Möbiusa** jest powierzchnią jednostronną

Niech $\vec{F} = (P, Q, R)$ będzie polem wektorowym na gładkim płacie zorientowanym $S_+ = \{\vec{r} = \vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$.

$$\text{Oznaczmy } d\vec{S} = \vec{n} dS = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS = (dydz, dzdx, dxdy)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{pole rzutu płata } dS \text{ na } YOZ}{\text{pole płata } dS} = \frac{dydz}{dS} \quad \text{itd}$$

Def. Całkę powierzchniową zorientowaną pola wektorowego $\vec{F}$ po płacie gładkim zorientowanym S_+ definiujemy wzorem:

$$\iint_{S_+} \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{S} \stackrel{df}{=} \iint_{S_+} \vec{F}(\vec{r}) \circ \vec{n}(\vec{r}) dS$$

Po rozpisaniu na współrzędne

$$\iint_{S_+} \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{S} = \iint_{S_+} \vec{F}(\vec{r}) \circ \vec{n}(\vec{r}) dS = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

$$\vec{F} = [P, Q, R] \quad d\vec{S} = [dydz, dzdx, dxdy] = \vec{n} dS = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma] dS$$

Interpretacja

- $\iint_S \vec{F} \circ d\vec{S}$ - strumień pola wektorowego $\vec{F}$ przez powierzchnię S .
- $\iint_S \vec{v} \circ d\vec{S}$ - ilość cieczy przepływającej w jednostce czasu przez płat zorientowany S , jeżeli prędkość cieczy w punkcie (x, y, z) jest równa $\vec{v}(x, y, z)$.

Własności

1. $\iint_S (\vec{F} + \vec{G}) \circ d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} + \iint_S \vec{G} \circ d\vec{S}$
2. $\iint_S (c\vec{F}) \circ d\vec{S} = c \iint_S \vec{F} \circ d\vec{S}$
3. $\iint_{S_1 \cup \dots \cup S_n} \vec{F} \circ d\vec{S} = \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} \vec{F} \circ d\vec{S}$
4. $\iint_{-S} f dS = - \iint_S f dS$, gdzie $-S$ jest płatem o orientacji przeciwnej do S

Tw.(o zamianie całki powierzchniowej zorientowanej na całkę podwójną) .Jeżeli pole wektorowe

$\vec{F}$ jest ciągle na gładkim płacie $S_+ = \{\vec{r} = \vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$, to

$$\iint_{S_+} \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \circ (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv.$$

Po rozpisaniu na współrzędne

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ \iint_D \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right) du dv \end{aligned}$$

Elementy teorii pola

Def. Pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q, R)$ nazywamy potencjalnym w obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$, jeżeli istnieje funkcja

$$U: V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ taka, że } \vec{F} = \text{grad } U \quad \left(\text{tzn. } P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Skalarną funkcję U nazywamy potencjałem pola wektorowego .

Def. Niech $\vec{F} = (P, Q, R)$ będzie różniczkowalnym polem wektorowym w obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$. Rotacją

pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q, R)$ nazywamy pole wektorowe

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Def. Niech $\vec{F} = (P, Q, R)$ będzie różniczkowalnym polem wektorowym w obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$.

Dywergencją pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q, R)$ nazywamy skalarne pole (funkcję skalarną)

$$\text{określone wzorem } \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Tw. Gaussa-Ostrogradskiego. Jeżeli

- $V \subset \mathbb{R}^3$ jest obszarem, którego brzeg S jest kawałkami gładkim płatem zamkniętym zorientowanym „na zewnątrz”
- pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q, R)$ jest klasy C^1 w V ,

$$\text{to } \iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz$$

$$\text{Inaczej } \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Strumień pola wektorowego (klasy C^1) przez gładką powierzchnię zamkniętą S zorientowaną na zewnątrz jest równa całce potrójnej z $\operatorname{div} \vec{F}$ po obszarze V ograniczonym powierzchnią S .

Przykład. Sprawdzić tw. Gaussa w przypadku $\vec{F} = (2x, 2y, 2z)$, S_+ : sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ zorientowana na zewnątrz.

- $\iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} = \iiint_V (2 + 2 + 2) \, dx dy dz = 8\pi R^3$
- Bezpośrednie obliczenie $\iint_S \vec{F} \circ d\vec{S}$

parametryzacja $\vec{r}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$, $u \in [0, 2\pi], v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $R = \text{const}$

$$\vec{r}_u(u, v) = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (R^2 \cos u \cos^2 v, R^2 \sin u \cos^2 v, R^2 \sin v \cos v) \quad D = \{(u, v): 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Parametryzacja zgodna z orientacją.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} &= \\ \iint_D (2R \cos u \cos v \, R^2 \cos u \cos^2 v + 2R \sin u \cos v \, R^2 \sin u \cos^2 v + 2R \sin v \, R^2 \sin v \cos v) du dv &= \\ = 2R^3 \iint_D \cos v \, du dv &= 8\pi R^3 \end{aligned}$$

Tw. Stokesa. Jeżeli

- S_+ jest kawałkami gładkim płatem zorientowanym, którego brzeg C_+ jest łukiem kawałkami gładkim zorientowanym zgodnie z orientacją płata
- Pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q, R)$ jest klasy C^1 na płacie S (łącznie z brzegiem),

$$\text{to } \oint_{C_+} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{S_+} \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S}$$

Po rozpisaniu na współrzędne-

$$\oint_{C_+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S_+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Interpretacja. Cyrkulacja wektora $\vec{F}$ po krzywej zamkniętej C jest równa strumieniowi wektora rotacji $\text{rot } \vec{F}$ przez dowolną powierzchnię (zorientowaną zgodnie) napiętą na tej krzywej.

Zadanie. Sprawdzić wzór Stokesa dla całki $I = \oint_K (x+z)dx + (x+y)dy + (y+z)dz$, gdzie K jest

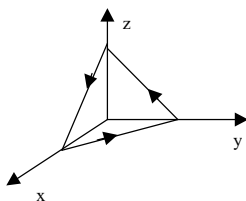
brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$ przebieganych w tej kolejności

Trójkąt leży na płaszczyźnie $x+y+z=2$

Parametryzacja płata $\vec{r}(u,v) = (u, v, 2-u-v)$; $\Delta = \{(u,v): 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2-u\}$

$$\vec{r}_u = (1, 0, -1), \quad \vec{r}_v = (0, 1, -1), \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = [1, 1, 1], \quad \text{rot } \vec{F} = [1, 1, 1]$$

$$\text{Z tw. Stokesa } I = \oint_K (x+z)dx + (x+y)dy + (y+z)dz = \iint_S [1, 1, 1] \circ d\vec{S} = 3 \iint_{\Delta} dudv = 6$$



$$\text{Bezpośrednio } I = \oint_K (x+z)dx + (x+y)dy + (y+z)dz = \int_{K_1} + \int_{K_2} + \int_{K_3} = 6$$

$$\text{bo } \int_{K_1} = - \int_0^2 (t-2)dt = 2 \quad \text{itd.}$$

Uwaga. Jeżeli w pewnym obszarze jednorodnym V jest określone pole $\vec{F}$ klasy C^1 dla którego $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$ (tzw. pole bezwirowe), to pole $\vec{F}$ jest potencjalne tzn. istnieje funkcja skalarna $U: V \rightarrow \mathbb{R}$,

taka, że $\vec{F} = \text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$ i $\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_K dU$ nie zależy od drogi K , tylko od punktu

początkowego $A(x_A, y_A, z_A)$ i końcowego $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_K Pdx + Qdy + Rdz = \int_K dU = U(B) - U(A) = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A)$$

Praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi przejścia tylko od stanu początkowego $A(x_A, y_A, z_A)$ i końcowego $B(x_B, y_B, z_B)$

W obszarze jednorodnym pole $\vec{F}$ jest potencjalne $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ w obszarze V .

Przykład. Pole wektorowe $\vec{F} = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2})$ rozważane w obszarze $y > 0, z > 0$ jest

polem bezwirowym ($\text{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$) a więc polem potencjalnym. Wyznamy potencjał tego pola.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \Rightarrow U(x, y, z) = \int P dx = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow \frac{x}{y^2} + \frac{x}{z} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi(y, z) = \psi(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = R \Leftrightarrow -\frac{xy}{z^2} + \psi'(z) = -\frac{xy}{z^2} \Rightarrow \psi'(z) = 0 \Rightarrow \psi(z) = C$$

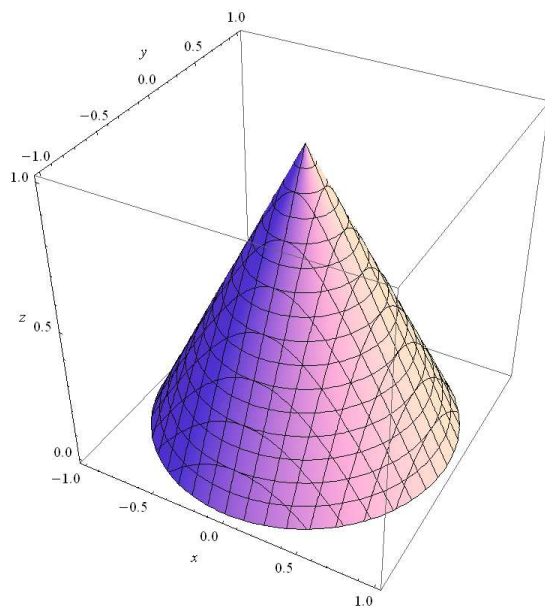
Ostatecznie potencjał $U(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$ został wyznaczony z dokładnością do stałej C .

$$\int_{(1,1,1)}^{(0,2,3)} (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}) dx + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}) dy - \frac{xy}{z^2} dz = U(0,2,3) - U(1,1,1) = -1.$$

Przykłady.

- Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{F} = (x, y, z)$ przez górną stronę powierzchni

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 \leq z \leq 1. \text{ (Odp. } \pi \text{)}$$



$$\text{Parametryzacja płata: } \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = 1 - u \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq v \leq 2\pi \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

$$\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, -1), \quad \vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0), \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (u \cos v, u \sin v, u)$$

Widać, że trzecia współrzędna wektora $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (czyli u) jest dodatnia, więc i wektor normalny

$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ ma dodatnią trzecią współrzędną, co oznacza, że sparametryzowano zewnętrzną

powierzchnię boczną stożka.

$$\begin{aligned} \iint_{S_+} \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \circ (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = \iint_D (u \cos v, u \sin v, 1 - u) \circ (u \cos v, u \sin v, u) du dv = \\ &= \iint_D u du dv = \int_0^1 u du \int_0^{2\pi} dv = \pi \end{aligned}$$