

Szeregi Fouriera

Przypomnienie.

Rozważmy przestrzeń euklidesową $V=R^n$, której elementami (punktami, wektorami) są n elementowe ciągi liczb rzeczywistych np. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. W przestrzeni tej definiujemy standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

spełniający następujące warunki:

- 1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- 2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^n \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
- 3) $\forall \lambda \in R \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n \quad \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- 4) $\forall \mathbf{x} \in R^n \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Przestrzeń liniową wyposażoną w iloczyn skalarny nazywamy **przestrzenią unitarną**

Przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle},$$

a więc także przestrzenią metryczną z metryką

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

W przypadku przestrzeni euklidesowej R^n powyższe wzory przybierają postać

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ są ortogonalne (prostopadłe), gdy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Niech $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ będzie bazą w R^n

Bazę $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ nazywamy **bazą ortogonalną** $\Leftrightarrow \forall i \neq j \quad \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$.

Bazę $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ nazywamy **bazą ortonormalną** $\Leftrightarrow \forall i, j \quad \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$

Niech $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ będzie bazą ortogonalną. Wówczas każdy wektor $\mathbf{x}$ można przedstawić w postaci

$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ (liczby α_i nazywamy współrzędnymi wektora $\mathbf{x}$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$). Współrzędne te

łatwo znaleźć w przypadku bazy ortogonalnej. Rzeczywiście mnożąc skalarne wektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ przez wektor $\mathbf{e}_k$ otrzymujemy korzystając z własności iloczynu skalarnego i ortogonalności baz

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \right\rangle = \alpha_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle.$$

Stąd

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}{\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle} \quad k=1, \dots, n.$$

Niech $V_0 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ będzie podprzestrzenią rozpiętą przez pierwsze m wektorów bazy ortogonalnej $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Dowolny wektor $\mathbf{x} \in R^n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^\perp,$$

gdzie $\mathbf{x}_0 \in V_0$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\mathbf{x}$ na podprzestrzeń V_0 , a $\mathbf{x}^\perp$ jest wektorem ortogonalnym do podprzestrzeni V_0 tzn. $\mathbf{x}^\perp \perp \mathbf{y}$ dla każdego $\mathbf{y} \in V_0$. Ponadto prawdziwa jest równość

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_0\|^2 + \|\mathbf{x}^\perp\|^2 \quad (\text{tw. Pitagorasa}),$$

skąd natychmiast otrzymujemy $\|\mathbf{x}_0\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$.

Rzut ortogonalny $\mathbf{x}_0 \in V_0$ wektora $\mathbf{x} \in V$ na podprzestrzeń V_0 ma pewną optymalną własność- mianowicie

$$\mathbf{x}_0 = \arg \min_{\mathbf{y} \in V_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

tzn. spośród wszystkich możliwych przedstawień wektora $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0), \quad \mathbf{y}_0 \in V_0$$

w postaci sumy wektora $\mathbf{y}_0$ z podprzestrzeni V_0 i jego uzupełnienia $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0$ norma wektora uzupełniającego $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0$ jest minimalna gdy wektorem $\mathbf{y}_0$ z przestrzeni V_0 jest rzut ortogonalny $\mathbf{x}_0$ wektora $\mathbf{x}$ na podprzestrzeń V_0 .

Poprzez analogię wprowadzimy powyższe pojęcia w pewnej przestrzeniach funkcyjnej.

Niech $V = \mathcal{R}[a, b]$ będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$. V jest rzeczywiście przestrzenią liniową- funkcje umiemy dodawać i mnożyć je przez skalary. W przestrzeni tej zdefiniujemy „iloczyn skalarny” wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (\text{Uwaga: iloczyn funkcji } \mathcal{R} \text{ całkowalnych jest funkcją } \mathcal{R} \text{ całkowalną}).$$

Łatwo zauważyć, że są spełnione wszystkie własności (1 - 4) iloczynu skalarnego oprócz drugiej

części punktu 4). Z równości $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx = 0$ nie wynika że $f \equiv 0$. Wobec tego utożsamimy

funkcje różniące się na zbiorze miary 0. Formalnie rozważamy klasy równoważności relacji $\sim$

zadanej wzorem $f \sim g \Leftrightarrow \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = 0$. Od tego momentu przestrzeń V , to przestrzeń klas

równoważności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. Przestrzeń V jest przestrzenią

unormowaną z normą $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$. Przestrzeń V z powyższą normą nazywać

będziemy przestrzenią $L^2[a, b]$.

Uwaga. W podręcznikach analizy przestrzeń $L^2[a, b]$ rozumiana jest zwykle jako przestrzeń klas równoważności funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a..

Ciąg $e_1(x), e_2(x), e_3(x), \dots$ funkcji będących elementami (wektorami) przestrzeni V nazywamy

ortogonalnym jeśli $\langle e_i, e_j \rangle = \int_a^b e_i(x) e_j(x) dx = 0 \quad \forall i \neq j$.

Szereg funkcyjny $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$, gdzie a_k jest ciągiem liczbowym a $e_1(x), e_2(x), e_3(x), \dots$ jest ciągiem

ortogonalnym, nazywamy szeregiem ortogonalnym

Danej funkcji $f \in V = L^2[a, b]$ możemy przyporządkować szereg

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x),$$

gdzie współczynniki zadane są wzorami Eulera-Fouriera

$$a_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}.$$

Pojawia się naturalne pytanie: Jak należy rozumieć zbieżność szeregu ortogonalnego i do czego jest zbieżny szereg ortogonalny?

- Zbieżność szeregu do sumy $S(x)$ można rozumieć w sensie normy $L^2[a, b]$ (tzw. zbieżność średniokwadratowa) tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| S - \sum_{k=1}^n \frac{\langle f, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} e_k(x) \right\| = 0$, ale nie gwarantuje to zbieżności punktowej

- Zbieżność szeregu do sumy $S(x)$ można rozumieć także w sensie zbieżności punktowej szeregu, ale wówczas może okazać się, że suma szeregu nie jest całkowalna w sensie Riemanna czyli jest elementem spoza przestrzeni $L^2[a,b]$

Dla każdej funkcji $f \in V = L^2[a,b]$ prawdziwa jest następująca nierówność Bessela

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, e_k \rangle^2}{\langle e_k, e_k \rangle} \leq \|f\|^2 \quad (\text{odpowiednik nierówności } \|x_0\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ wynikającej z tw. Pitagorasa}).$$

Jeżeli dla każdej funkcji $f \in V = L^2[a,b]$ prawdziwa jest równość Parsevala

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, e_k \rangle^2}{\langle e_k, e_k \rangle} = \|f\|^2$$

to układ ortogonalny nazywamy zupełnym w $V = L^2[a,b]$. Oznacza to, że jedyną (z dokładnością do zbioru miary 0) funkcją ortogonalną do wszystkich funkcji układu ortogonalnego jest funkcja $f \equiv 0$

Tw. Jeżeli układ ortogonalny jest zupełny, to szereg ortogonalny danej funkcji $f \in V = L^2[a,b]$ jest zbieżny do tej funkcji w sensie normy L^2 .

Szereg Fouriera

Rozważmy przestrzeń $V = L^2[-l,l]$. Układ trygonometryczny

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

jest układem ortogonalnym zupełnym w $V = L^2[-l,l]$.

Każdej funkcji $f \in V = L^2[a,b]$ odpowiada jej szereg ortogonalny

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \text{ gdzie } a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

zwany szeregiem Fouriera zbieżny średniokwadratowo do funkcji f .

Następujące twierdzenie Dirichleta podaje warunek wystarczający punktowej zbieżności szeregu danej funkcji f do tej funkcji.

Tw. Jeżeli

- funkcja f jest przedziałami monotoniczna w $[-l, l]$
- funkcja f jest ciągła z wyjątkiem w $[-l, l]$ z wyjątkiem skończonej ilości punktów w których ma nieciągłości I-go rodzaju i w każdym punkcie nieciągłości spełniony jest warunek $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_{0-}) + f(x_{0+}))$
- $f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}(f(-l_+) + f(l_-))$

$$\text{to} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \forall x \in [-l, l].$$

Ponadto, jeśli f jest okresowa o okresie $2l$ to powyższa równość jest prawdziwa $\forall x \in \mathbb{R}$.

Wnioski.

- jeśli f jest parzysta, to $b_k=0 \quad \forall k$
- jeśli f jest nieparzysta, to $a_k=0 \quad \forall k$

Układ trygonometryczny jest zupełny więc prawdziwa jest równość Parsevala

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Przykład. Dla funkcji $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$ określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ znaleźć jej szereg

Fouriera. Do jakiej funkcji jest punktowo zbieżny ten szereg.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Ponieważ f jest nieparzysta, to $a_k=0 \quad \forall k$.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} \frac{4}{(2n-1)\pi}, & k = 2n-1 \\ 0, & k = 2n \end{cases}$$

$$\text{sign}(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

Szereg Fouriera $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$ jest punktowo zbieżny do funkcji $f(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$.

Jeśli funkcję okresowo przedłużymy na całą oś liczbową, to szereg Fouriera jest zbieżny do przedłużonej funkcji na całej osi $\mathbb{R}$.

Wnioski uboczne. Ustalając argument $x = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy (niespodziewanie) sumę szeregu

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (-1)^{n+1}, \quad \text{stad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Z równości Parsevala otrzymujemy ponadto, $\frac{1}{\pi} 2\pi = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ a stad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Uzupełnić.

Z uwagi na tożsamość $a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = A_k \sin(\frac{k\pi x}{l} + \varphi_k)$ szereg Fouriera

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ można przedstawić w postaci $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{k\pi x}{l} + \varphi_k)$

- Widmo amplitudowe i fazowe
- Zasada lokalizacji (zachowanie się szeregu Fouriera funkcji f w punkcie x_0 zależy wyłącznie od zachowania się funkcji f na dowolnie małym otoczeniu punktu x_0).