Ciągłość funkcji w punkcie

Def. Funkcję $f : R \supset D \to R$ nazywamy ciągłą w punkcie $x_0 \in D$ jeżeli

- Heine $\forall_{(x_n)\subset D} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$
- Cauchy $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} \quad |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$

Uwaga: Punkt $x_0 \in D$ ale nie musi być punktem skupienia zbioru *D*. Jeżeli $x_0 \in D$ jest punktem izolowanym zbioru *D*, to z definicji funkcja jest ciągła w punkcie izolowanym. Jeżeli natomiast $x_0 \in D$ jest punktem skupienia zbioru *D*, to z definicji funkcja jest ciągła w punkcie skupienia $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ciągłość punktowa funkcji $f : R \supset D \to R$

Def. Funkcja $f : R \supset D \to R$ jest **punktowo ciągła** w *D*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru *D*, czyli

(C) $\forall_{x_1\in D}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta(x_1,\varepsilon)>0}\forall_{x_2\in D} \quad |x_1 - x_2| \le \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$

(H) $\forall_{x\in D}\forall_{(x_n)\subset D} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

Ciągłość jednostajna

Def. Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** w *D* gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1\in D}\forall_{x_2\in D} \ |x_1 - x_2| \le \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy korzystając z tautologii $\{\exists x\ \forall y : \varphi(x,y)\} \Rightarrow \{\forall y\ \exists x : \varphi(x,y)\}$

Tw. Jeżeli f jest **jednostajnie ciągła** na D , to f jest **punktowo ciągła** na *D*.

Problem. Jak praktycznie badać jednostajną ciągłość funkcji?

Użytecznym pojęciem jest tzw. moduł ciągłości funkcji.

Def. Modułem ciągłości funkcji $f : R \supset D \to R$ nazywamy funkcję

$$\omega_f(\delta) = \omega(f,\delta) \overset{df}{=} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in D \ \wedge\ |x_1 - x_2| \le \delta\}$$

Tw. Funkcja $f : R \supset D \to R$ jest jednostajnie ciągła na $D \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta\to 0} \omega(f,\Delta) = 0$

Dowód .

$$f : R \supset D \to R \text{ jest jednostajnie ciągła na } D$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A}\forall_{y\in A} |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\Delta\le\delta} \ \omega(f,\Delta) \le \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \omega(f,\Delta) = 0$$

Przykład. Pokazać, że $f(x)=\sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale D=[0,∞)

$$\omega(f,\Delta)=\sup_{x_1,x_2\in D}\{|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|:|x_1-x_2|\le\Delta\}=\sup_{x\ge 0}\{|\sqrt{x+\Delta}-\sqrt{x}|\}=\sup_{x\ge 0}\{\tfrac{x+\Delta-x}{\sqrt{x+\Delta}+\sqrt{x}}\}\le\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta}}=\sqrt{\Delta}$$

Stąd $\lim_{\Delta\to 0}\omega(f,\Delta)=0$, więc f jest jednostajnie ciągła na przedziale [0,∞).

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Tw. (Weierstrassa) Jeżeli funkcja $f:R\supset[a,b]\to R$ jest ciągła na $[a,b]$, to f – ograniczona i

$$\exists_{x_1,x_2\in[a,b]}: f(x_1)=\sup_{x\in[a,b]}f(x) \text{ i } f(x_2)=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$$

Dowód. Ograniczoność od góry. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że funkcja f nie jest ograniczona od góry. Istnieje więc ciąg $(x_n)\subset[a,b]$ taki że $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że z ograniczonego ciągu (x_n) można wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny tzn. $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$. Z ciągłości funkcji f otrzymujemy $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)$, co jest w sprzeczności z faktem $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$ (każdy podciąg ciągu rozbieżnego do nieskończoności jest rozbieżny do nieskończoności).

Osiąganie kresu górnego $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$. Jeśli kres górny M zbioru wartości funkcji nie jest osiągnięty, to jest on punktem skupienia zbioru wartości funkcji. Istnieje więc ciąg $(x_n)\subset[a,b]$ taki że $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=M$. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg zbieżny $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$. Z ciągłości funkcji f otrzymujemy $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)=M$.

Tw. (**Darboux**) (o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Jeżeli $f:R\supset I\to R$ - ciągła na przedziale I, to

$$\forall_{x_1,x_2\in I}\forall_{y\in R}\quad f(x_1)<y<f(x_2)\Rightarrow\exists_{x\in I}\ y=f(x)$$

Dowód. Rozważmy pomocniczą funkcję $g(x)=f(x)-y$. Funkcja g przyjmuje na końcach przedziału $[l_1,p_1]$ gdzie $l_1=\min\{x_1,x_2\}$ i $p_1=\max\{x_1,x_2\}$ wartości różnych znaków, tzn. $g(l_1)g(p_1)<0$. Niech s_1 będzie środkiem przedziału $[l_1,p_1]$. Jeśli $g(s_1)=0$, to twierdzenie zostało udowodnione. W przeciwnym przypadku rozważamy przedział $[l_2,p_2]$ zastępując jeden z końców l_1, p_1 punktem s_1 tak, aby $g(l_2)g(p_2)<0$. Powtarzamy powyższą procedurę konstruując ciąg przedziałów $[l_n,p_n]$ i ich środków s_n. Jeśli dla pewnego n otrzymamy $g(s_n)=0$, to twierdzenie jest udowodnione. Jeśli nie, to skonstruowaliśmy dwa ciągi zbieżne: niemalejący i ograniczony od góry (l_n) oraz nierosnący i ograniczony od dołu (p_n) przy czym $\lim_{n\to\infty}(p_n-l_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{p_1-l_1}{2^{n-1}}=0$. Stąd $\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}p_n=x$. Z tw. o zachowaniu słabej nierówności w granicy otrzymujemy $g^2(x) \le 0$, więc $g(x) = 0$, co kończy dowód.

Tw. (**Cantora**) Funkcja $f : R \supset [a,b] \to R$ - ciągła na przedziale domkniętym [*a,b*] jest **jednostajnie ciągła** na [*a,b*]

Dow: (nie wprost.) Nieprawda, że *f* jest jednostajnie ciągła $\Leftrightarrow$

$$\sim \left\lfloor \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in[a,b]} \forall_{x'\in[a,b]} \; |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \right\rfloor \Leftrightarrow$$

$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x\in[a,b]} \exists_{x'\in[a,b]} \; |x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \ge \varepsilon$. Dla każdego δ, czyli w szczególności dla $\delta = 1/n$ też istnieją ciągi (x_n), $(x_n^{'})$ takie, że $|x_n - x_n^{'}| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(x_n^{'})| \ge \varepsilon$ (istnieje takie ε). Ponieważ (x_n) jest ciągiem w [*a,b*], więc można z niego wybrać podciąg zbieżny $x_{n_k} \to c$. Z warunku trójkąta mamy $|x_{n_k}^{'} - c| \le |x_{n_k}^{'} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c|$, skąd wynika, że $x_{n_k}^{'} \to c$. Z ciągłości funkcji *f* mamy $f(x_{n_k}) \to f(c)$ i $f(x_{n_k}^{'}) \to f(c)$, więc $|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}^{'})| \to 0)$, co przeczy warunkowi $|f(x_n) - f(x_n^{'})| \ge \varepsilon \; \forall n$

Tw: (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeżeli funkcja $f : R \supset (a,b) \to R$ - ciągła na **przedziale otwartym** (*a,b*) , $x_0 \in (a,b)$ i $f(x_0)>0$, to istnieje otoczenie punktu x_0 (powiedzmy $K(x_0,\delta)$) takie, że $\forall x \in K(x_0,\delta)$ $f(x)>0$.

Dowód. (nie wprost) gdyby w każdym otoczeniu punktu x_0 istniały punkty w których $f(x) \le 0$, to istnieje ciąg tych punktów , zbieżny do x_0. Z ciągłości funkcji i twierdzenia o zachowaniu słabej nierówności w przejściu granicznym wynika , że $f(x_0) \le 0,$ sprzeczność

Tw. (**o ciągłości funkcji odwrotnej**). Jeżeli funkcja $f : R \supset I \to R$ (gdzie *I* – dowolny przedział) jest ciągła i rosnąca (malejąca), to funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła i rosnąca (malejąca).

Dowód. Niech *f* będzie ciągła i rosnąca w przedziale *I* . Z tw.Darboux wynika że „ciągły obraz przedziału jest przedziałem” $J=f[I]$ jest przedziałem a *f* jest funkcją różnowartościową. Istnieje więc f^{-1}: $J \to I$ i f^{-1} jest rosnąca (**dowód nie wprost**). Aby wykazać ciągłość funkcji f^{-1} w punkcie y_0 przedziału *J*, wystarczy wykazać, że jeśli $y_n \to y_0$, to $f^{-1}(y_n) = x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0)$. Gdyby ciąg (x_n) nie dążył do granicy x_0, to nieskończenie wiele wyrazów leżałoby na zewnątrz przedziału $(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)$ czyli spełniałoby jedną z nierówności $x_n < x_0-\varepsilon$, $x_n > x_0+\varepsilon$. W pierwszym przypadku $y_n=f(x_n)<f(x_0-\varepsilon)=f(x_0)-\eta_1$ (tu korzystamy z założenia, że *f* jest rosnąca). W drugim $y_n=f(x_n)>f(x_0+\varepsilon)= f(x_0)+\eta_2$ (η_1 i η_2 >0).Wobec tego nieskończenie wiele wyrazów y_n leżałoby na zewnątrz przedziału $(y_0-\eta_1 , y_0+\eta_2)$ co przeczy założeniu, ze $y_n \to y_0$.

Ciągłość złożenia

Tw. Jeżeli *f* jest ciągła w punkcie x_0, a *g* jest ciągła w punkcie $f(x_0)$ to $g \circ f$ (złożenie *f* z *g*) jest ciągła w punkcie x_0.

Tw. Jeżeli *f* jest ciągła na zbiorze *A* i *g* jest ciągła na zbiorze *B* to $g \circ f$ jest ciągła na zbiorze A.

Tw. Jeżeli *f* jest jednostajnie ciągła na zbiorze *A* i *g* jest jednostajnie ciągła na zbiorze *B* to $g \circ f$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze *A*.

Dowód Powyższe twierdzenia są natychmiastową konsekwencją definicji złożenia funkcji i definicji (odpowiednio punktowej i jednostajnej) ciągłości funkcji.

Ciągłość sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej

$$f : R \supset D \to R \quad ; \quad g : R \supset D \to R$$

Tw Jeżeli *f* i *g* są ciągłe w punkcie $x_0 \in A$, to $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}(g(x_0) \neq 0)$ są ciągłe w punkcie x_0.

Jeżeli *f* i *g* są ciągłe na zbiorze *D*, to $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(\forall_{x \in D}\ g(x) \neq 0)$ są ciągłe na zbiorze *D*.

Jeżeli *f* i *g* są jednostajnie ciągłe na zbiorze *D* to, to $f+g$, $f-g$ są jednostajnie ciągłe na zbiorze *D* (funkcje $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ nie musza być jednostajnie ciągłe)

Wnioski

1º Wielomian jest funkcją ciągłą, bo jest on sumą funkcji ciągłych oraz iloczynów funkcji ciągłych.

2º Funkcja wymierna jest ciągła, bo jest ilorazem dwóch ciągłych wielomianów.

Dowodzi się, że

3º Funkcja potęgowa jest ciągła tzn $\forall x_0 \in D \ \lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ Z uwagi na równość $x^\alpha = x_0^\alpha \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$ wystarczy udowodnić ciągłość w punkcie x_0=1 tzn. $\lim\limits_{x \to 1} x^\alpha = 1$ (**ćwiczenia**)

4º Funkcja wykładnicza jest ciągła $\forall x_0 \in D \ \lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Z uwagi na równość $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}$ wystarczy udowodnić ciągłość w punkcie x_0=0 (**ćwiczenia)**

5º Funkcje trygonometryczne są ciągłe np $\forall x_0 \ \lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ (**ćwiczenia**)

Wnioski.

- Funkcje logarytmiczne i cyklometryczne są ciągłe (bo są odwrotne do funkcji ciągłych)
- **Funkcje elementarne**, czyli wszystkie powyższe oraz takie, które można otrzymać z poprzednich przez skończoną ilość działań arytmetycznych oraz złożeń, są ciągłe w swoich naturalnych dziedzinach.

Uzupełnienie.

- Ciągłość funkcji wykładniczej .

Należy pokazać, że $\forall x_0 \ \lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Z uwagi na równość $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}$ wystarczy pokazać ciągłość funkcji wykładniczej w punkcie 0, czyli $\lim\limits_{x \to 0} a^x = a^0 = 1$. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji należy pokazać, że $\forall (x_n) \ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = 1$.

Wiadomo, że $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$ stąd

$$\forall \varepsilon \ \exists n_0 \ \forall k \geq n_0 \ 1 - \varepsilon \leq a^{\frac{1}{k}} \leq 1 + \varepsilon \ \wedge 1 - \varepsilon \leq a^{\frac{-1}{k}} \leq 1 + \varepsilon$$

Z faktu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ wynika, że $\forall k\ \exists m_0\ \forall n \ge m_0\ \ \dfrac{-1}{k} \le x_n \le \dfrac{1}{k}$. Wobec tego $a^{\frac{-1}{k}} \le a^{x_n} \le a^{\frac{1}{k}}$, gdy $a > 1$ i $a^{\frac{1}{k}} \le a^{x_n} \le a^{\frac{-1}{k}}$ gdy $a < 1$. Stąd biorąc $N = \max\{n_0, m_0\}$ mamy

$\forall \varepsilon \exists N \forall n \ge N\ \ 1-\varepsilon \le a^{x_n} \le 1+\varepsilon$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

- Ciągłość funkcji potęgowej.

Należy pokazać, że $\forall x_0 \in D\ \lim\limits_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$. Z uwagi na równość $x^\alpha = x_0^\alpha (\frac{x}{x_0})^\alpha$ wystarczy pokazać ciągłość funkcji potęgowej w punkcie 1, czyli $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1^\alpha = 1$. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji należy pokazać, że $\forall (x_n)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = 1$.

Niech $k \in N$ będzie takie, że $-k \le \alpha \le k$. Z tw. o arytmetyce granic wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-k} = 1$. Wobec tego

$\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ 1-\varepsilon \le x_n^k \le 1+\varepsilon\ \wedge 1-\varepsilon \le x_n^{-k} \le 1+\varepsilon$.

Rozważając wszystkie warianty związane z monotonicznością funkcji potęgowej i położeniem x_n względem 1, mamy nierówność $\min\{x_n^k, x_n^{-k}\} \le x_n^\alpha \le \max\{x_n^k, x_n^{-k}\}$, z której wynika, że $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ 1-\varepsilon \le x_n^\alpha \le 1+\varepsilon$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = 1$, co dowodzi ciągłości funkcji potęgowej w punkcie 1.

- Ciągłość funkcji sininus.

Należy pokazać, że $\forall x_0\ \lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. Z tożsamości $\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$, ograniczoności funkcji cosinus i nierówności $|\sin x| \le |x|$ mamy

$|\sin x - \sin x_0| \le |x - x_0|$, z której łatwo wynika ciągłość funkcji sinus.

Podobnie dowodzi się ciągłości funkcji cosinus. Funkcje tangens i cotangens jako ilorazy funkcji ciągłych są ciągłe w swoich dziedzinach.