

§ 26. TESTY AUTOKORELACJI

Niech Y_1, Y_2, \dots, Y_n będzie ciągiem obserwacji o jednakowym rozkładzie normalnym. *Statystyką von Neumanna* nazywamy statystykę

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

gdzie $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n$. Tablica 48 podaje wartości krytyczne $v(\alpha; n)$ tej statystyki obliczone w taki sposób, że jeżeli Y_1, Y_2, \dots, Y_n są niezależnymi zmiennymi losowymi, to

$$P\{V \leq v(\alpha; n)\} = \alpha.$$

Niech obserwacje Y_1, Y_2, \dots, Y_n mają postać

$$Y_i = b_0 + x_{i1}b_1 + \dots + x_{ik}b_k + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + U_i, \quad |\rho| < 1,$$

przy czym U_1, U_2, \dots, U_n są niezależnymi zmiennymi losowymi ze średnią równą zero i nieznaną wariancją. Statystyka Durbina-Watsona, służąca do weryfikacji hipotezy $H: \rho = 0$, ma postać

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i)^2}{\sum_{i=1}^n z_i^2},$$

gdzie

$$z_i = Y_i - \hat{b}_0 - x_{i1}\hat{b}_1 - \dots - x_{ik}\hat{b}_k,$$

przy czym $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k$ są oszacowaniami współczynników regresji b_0, b_1, \dots, b_k , uzyskanymi metodą najmniejszych kwadratów. Rozkład statystyki d zależy od macierzy eksperymentu $X = (x_{ij}; i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, k)$, ale Durbin i Watson skonstruowali dwie zmienne losowe d_L i d_U takie, że $d_L \leq d \leq d_U$, przy czym rozkłady tych zmiennych losowych, gdy $\rho = 0$, zależą tylko od n oraz k .

Tablica 49 podaje wartości krytyczne $d_L(\alpha; n, k)$ i $d_U(\alpha; n, k)$ takie, że gdy hipoteza H jest prawdziwa, wtedy

$$P\{d_L \leq d_L(\alpha; n, k)\} = \alpha \quad \text{oraz} \quad P\{d_U \leq d_U(\alpha; n, k)\} = \alpha.$$

W przypadku testowania hipotezy H przeciwko hipotezie $K^+ : \rho > 0$, test odrzucający H , gdy $d \leq d_L(\alpha; n, k)$, jest testem o rozmiarze co najwyżej α , a test odrzucający H , gdy $d \leq d_U(\alpha; n, k)$, jest testem o rozmiarze co najmniej α . W przypadku hipotezy alternatywnej $K^- : \rho < 0$, test odrzuca H , gdy, odpowiednio,

$$d \geq 4 - d_L(\alpha; n, k) \quad \text{lub} \quad d \geq 4 - d_U(\alpha; n, k).$$

Tablica 49 pochodzi z artykułu Savina i White'a (1977).

TABLICA 49. Wartości krytyczne $d_L(\alpha; n, k)$ i $d_U(\alpha; n, k)$

n	α	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5		k = 6		k = 7	
		d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,05	0,610	1,400												
	0,01	0,390	1,142												
7	0,05	0,700	1,356	0,467	1,896										
	0,01	0,435	1,036	0,294	1,676										
8	0,05	0,763	1,332	0,559	1,777	0,368	2,287								
	0,01	0,497	1,003	0,345	1,489	0,229	2,102								
9	0,05	0,824	1,320	0,629	1,699	0,455	2,128	0,296	2,588						
	0,01	0,554	0,998	0,408	1,389	0,279	1,875	0,183	2,433						
10	0,05	0,879	1,320	0,697	1,641	0,525	2,016	0,376	2,414	0,243	2,822				
	0,01	0,604	1,001	0,466	1,333	0,340	1,733	0,230	2,193	0,150	2,690				
11	0,05	0,927	1,324	0,758	1,604	0,595	1,928	0,444	2,283	0,316	2,645	0,203	3,005		
	0,01	0,653	1,010	0,519	1,297	0,396	1,640	0,286	2,030	0,193	2,453	0,124	2,892		
12	0,05	0,971	1,331	0,812	1,579	0,658	1,864	0,512	2,177	0,379	2,506	0,268	2,832	0,171	3,149
	0,01	0,697	1,023	0,569	1,274	0,449	1,575	0,339	1,913	0,244	2,280	0,164	2,665	0,105	3,053
13	0,05	1,010	1,340	0,861	1,562	0,715	1,816	0,574	2,094	0,445	2,390	0,328	2,692	0,230	2,985
	0,01	0,738	1,038	0,616	1,261	0,499	1,526	0,391	1,826	0,294	2,150	0,211	2,490	0,140	2,838
14	0,05	1,045	1,350	0,905	1,551	0,767	1,779	0,632	2,030	0,505	2,296	0,389	2,572	0,286	2,848
	0,01	0,776	1,054	0,660	1,254	0,547	1,490	0,441	1,757	0,343	2,049	0,257	2,354	0,183	2,667
15	0,05	1,077	1,361	0,946	1,543	0,814	1,750	0,685	1,977	0,562	2,220	0,447	2,472	0,343	2,727
	0,01	0,811	1,070	0,700	1,252	0,591	1,464	0,488	1,704	0,391	1,967	0,303	2,244	0,226	2,530
16	0,05	1,106	1,371	0,982	1,539	0,857	1,728	0,734	1,935	0,615	2,157	0,502	2,388	0,398	2,624
	0,01	0,844	1,086	0,737	1,252	0,633	1,446	0,532	1,663	0,437	1,900	0,349	2,153	0,269	2,416
17	0,05	1,133	1,381	1,015	1,536	0,897	1,710	0,779	1,900	0,664	2,104	0,554	2,318	0,451	2,537
	0,01	0,874	1,102	0,772	1,255	0,672	1,432	0,574	1,630	0,480	1,847	0,393	2,078	0,313	2,319
18	0,05	1,158	1,391	1,046	1,535	0,933	1,696	0,820	1,872	0,710	2,060	0,603	2,257	0,502	2,461
	0,01	0,902	1,118	0,805	1,259	0,708	1,422	0,613	1,604	0,522	1,803	0,435	2,015	0,355	2,238
19	0,05	1,180	1,401	1,074	1,536	0,967	1,685	0,859	1,848	0,752	2,023	0,649	2,206	0,549	2,396
	0,01	0,928	1,132	0,835	1,265	0,742	1,415	0,650	1,584	0,561	1,767	0,476	1,963	0,396	2,169
20	0,05	1,201	1,411	1,100	1,537	0,998	1,676	0,894	1,828	0,792	1,991	0,692	2,162	0,595	2,339
	0,01	0,952	1,147	0,863	1,271	0,773	1,411	0,685	1,567	0,598	1,737	0,515	1,918	0,436	2,110
21	0,05	1,221	1,420	1,125	1,538	1,026	1,669	0,927	1,812	0,829	1,964	0,732	2,124	0,637	2,290
	0,01	0,975	1,161	0,890	1,277	0,803	1,408	0,718	1,554	0,633	1,712	0,552	1,881	0,474	2,059
22	0,05	1,239	1,429	1,147	1,541	1,053	1,664	0,958	1,797	0,863	1,940	0,769	2,090	0,677	2,246
	0,01	0,997	1,174	0,914	1,284	0,831	1,407	0,748	1,543	0,667	1,694	0,587	1,849	0,510	2,015
23	0,05	1,257	1,437	1,168	1,543	1,078	1,660	0,986	1,785	0,895	1,920	0,804	2,061	0,715	2,208
	0,01	1,018	1,187	0,938	1,291	0,858	1,407	0,777	1,534	0,698	1,673	0,620	1,821	0,545	1,977
24	0,05	1,273	1,446	1,188	1,546	1,101	1,656	1,013	1,775	0,925	1,902	0,837	2,035	0,751	2,174
	0,01	1,037	1,199	0,960	1,298	0,882	1,407	0,805	1,528	0,728	1,658	0,652	1,797	0,578	1,944
25	0,05	1,288	1,454	1,206	1,550	1,123	1,654	1,038	1,767	0,953	1,886	0,868	2,012	0,784	2,144
	0,01	1,055	1,211	0,981	1,305	0,906	1,409	0,831	1,521	0,756	1,645	0,682	1,776	0,610	1,915
26	0,05	1,302	1,461	1,224	1,553	1,143	1,652	1,062	1,759	0,979	1,873	0,897	1,992	0,816	2,117
	0,01	1,072	1,222	1,001	1,312	0,928	1,411	0,855	1,518	0,783	1,635	0,711	1,759	0,640	1,889
27	0,05	1,316	1,469	1,240	1,556	1,162	1,651	1,084	1,753	1,004	1,861	0,925	1,974	0,845	2,093
	0,01	1,089	1,233	1,019	1,319	0,949	1,413	0,878	1,515	0,808	1,626	0,738	1,743	0,669	1,867
28	0,05	1,328	1,476	1,255	1,560	1,181	1,650	1,104	1,747	1,028	1,850	0,951	1,958	0,874	2,071
	0,01	1,104	1,244	1,037	1,325	0,969	1,415	0,900	1,513	0,832	1,618	0,764	1,729	0,696	1,847
29	0,05	1,341	1,483	1,270	1,563	1,198	1,650	1,124	1,743	1,050	1,841	0,975	1,944	0,900	2,052
	0,01	1,119	1,254	1,054	1,332	0,988	1,418	0,921	1,512	0,855	1,611	0,788	1,718	0,723	1,830
30	0,05	1,352	1,489	1,284	1,567	1,214	1,650	1,143	1,739	1,071	1,833	0,998	1,931	0,926	2,034
	0,01	1,133	1,263	1,070	1,339	1,006	1,421	0,941	1,511	0,877	1,606	0,812	1,707	0,748	1,814

TABLICA 49 (cd.). Wartości krytyczne $d_L(\alpha; n, k)$ i $d_U(\alpha; n, k)$

n	α	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$		$k = 6$		$k = 7$	
		d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
31	0,05	1,363	1,496	1,297	1,570	1,229	1,650	1,160	1,735	1,090	1,825	1,020	1,920	0,950	2,018
	0,01	1,147	1,273	1,085	1,345	1,023	1,425	0,960	1,510	0,897	1,601	0,834	1,698	0,772	1,800
32	0,05	1,373	1,502	1,309	1,574	1,244	1,650	1,177	1,732	1,109	1,819	1,041	1,909	0,972	2,004
	0,01	1,160	1,282	1,100	1,352	1,040	1,428	0,979	1,510	0,917	1,597	0,856	1,690	0,794	1,788
33	0,05	1,383	1,508	1,321	1,577	1,258	1,651	1,193	1,730	1,127	1,813	1,061	1,900	0,994	1,991
	0,01	1,172	1,291	1,114	1,358	1,055	1,432	0,996	1,510	0,936	1,594	0,876	1,683	0,816	1,776
34	0,05	1,393	1,514	1,333	1,580	1,271	1,652	1,208	1,728	1,144	1,808	1,080	1,891	1,015	1,979
	0,01	1,184	1,299	1,128	1,364	1,070	1,435	1,012	1,511	0,954	1,591	0,896	1,677	0,837	1,766
35	0,05	1,402	1,519	1,343	1,584	1,283	1,653	1,222	1,726	1,160	1,803	1,097	1,884	1,034	1,967
	0,01	1,195	1,307	1,140	1,370	1,085	1,439	1,028	1,512	0,971	1,589	0,914	1,671	0,857	1,757
36	0,05	1,411	1,525	1,354	1,587	1,295	1,654	1,236	1,724	1,175	1,799	1,114	1,877	1,053	1,957
	0,01	1,206	1,315	1,153	1,376	1,098	1,442	1,043	1,513	0,988	1,588	0,932	1,666	0,877	1,749
37	0,05	1,419	1,530	1,364	1,590	1,307	1,655	1,249	1,723	1,190	1,795	1,131	1,870	1,071	1,948
	0,01	1,217	1,323	1,165	1,382	1,112	1,446	1,058	1,514	1,004	1,586	0,950	1,662	0,895	1,742
38	0,05	1,427	1,535	1,373	1,594	1,318	1,656	1,261	1,722	1,204	1,792	1,146	1,864	1,088	1,939
	0,01	1,227	1,330	1,176	1,388	1,124	1,449	1,072	1,515	1,019	1,585	0,966	1,658	0,913	1,735
39	0,05	1,435	1,540	1,382	1,597	1,328	1,658	1,273	1,722	1,218	1,789	1,161	1,859	1,104	1,932
	0,01	1,237	1,337	1,187	1,393	1,137	1,453	1,085	1,517	1,034	1,584	0,982	1,655	0,930	1,729
40	0,05	1,442	1,544	1,391	1,600	1,338	1,659	1,285	1,721	1,230	1,786	1,175	1,854	1,120	1,924
	0,01	1,246	1,344	1,198	1,398	1,148	1,457	1,098	1,518	1,049	1,584	0,997	1,652	0,946	1,724
45	0,05	1,475	1,566	1,430	1,615	1,383	1,666	1,336	1,720	1,287	1,776	1,238	1,835	1,189	1,895
	0,01	1,288	1,376	1,245	1,423	1,201	1,474	1,156	1,528	1,111	1,584	1,065	1,643	1,019	1,704
50	0,05	1,503	1,585	1,462	1,628	1,421	1,674	1,378	1,721	1,335	1,771	1,291	1,822	1,246	1,875
	0,01	1,324	1,403	1,285	1,446	1,245	1,491	1,205	1,538	1,164	1,587	1,123	1,639	1,081	1,692
55	0,05	1,528	1,601	1,490	1,641	1,452	1,681	1,414	1,724	1,374	1,768	1,334	1,814	1,294	1,861
	0,01	1,356	1,427	1,320	1,466	1,284	1,506	1,247	1,548	1,209	1,592	1,172	1,638	1,134	1,685
60	0,05	1,549	1,616	1,514	1,652	1,480	1,689	1,444	1,727	1,408	1,767	1,372	1,808	1,335	1,850
	0,01	1,383	1,449	1,350	1,484	1,317	1,520	1,283	1,558	1,249	1,598	1,214	1,639	1,179	1,682
65	0,05	1,567	1,629	1,536	1,662	1,503	1,696	1,471	1,731	1,438	1,767	1,404	1,805	1,370	1,843
	0,01	1,407	1,468	1,377	1,500	1,346	1,534	1,315	1,568	1,283	1,604	1,251	1,642	1,218	1,680
70	0,05	1,583	1,641	1,554	1,672	1,525	1,703	1,494	1,735	1,464	1,768	1,433	1,802	1,401	1,837
	0,01	1,429	1,485	1,400	1,515	1,372	1,546	1,343	1,578	1,313	1,611	1,283	1,645	1,253	1,680
75	0,05	1,598	1,652	1,571	1,680	1,543	1,709	1,515	1,739	1,487	1,770	1,458	1,801	1,428	1,834
	0,01	1,448	1,501	1,422	1,529	1,395	1,557	1,368	1,587	1,340	1,617	1,313	1,646	1,284	1,682
80	0,05	1,611	1,662	1,586	1,688	1,560	1,715	1,534	1,743	1,507	1,772	1,480	1,801	1,453	1,831
	0,01	1,466	1,515	1,441	1,541	1,416	1,568	1,390	1,595	1,364	1,624	1,338	1,653	1,312	1,683
85	0,05	1,624	1,671	1,600	1,696	1,575	1,721	1,550	1,747	1,525	1,774	1,500	1,801	1,474	1,829
	0,01	1,482	1,528	1,458	1,553	1,435	1,578	1,411	1,603	1,386	1,630	1,362	1,657	1,337	1,685
90	0,05	1,635	1,679	1,612	1,703	1,589	1,726	1,566	1,751	1,542	1,776	1,518	1,801	1,494	1,827
	0,01	1,496	1,540	1,474	1,563	1,452	1,587	1,429	1,611	1,406	1,636	1,383	1,661	1,360	1,687
95	0,05	1,645	1,687	1,623	1,709	1,602	1,732	1,579	1,755	1,557	1,778	1,535	1,802	1,512	1,827
	0,01	1,510	1,552	1,489	1,573	1,468	1,596	1,446	1,618	1,425	1,642	1,403	1,666	1,381	1,690
100	0,05	1,654	1,694	1,634	1,715	1,613	1,736	1,692	1,758	1,571	1,780	1,550	1,803	1,528	1,826
	0,01	1,522	1,562	1,503	1,583	1,482	1,604	1,462	1,625	1,441	1,647	1,421	1,670	1,400	1,693
150	0,05	1,720	1,746	1,706	1,760	1,693	1,774	1,679	1,788	1,665	1,802	1,651	1,817	1,637	1,832
	0,01	1,611	1,637	1,598	1,651	1,584	1,665	1,571	1,679	1,557	1,693	1,543	1,708	1,530	1,722
200	0,05	1,758	1,778	1,748	1,789	1,738	1,799	1,728	1,810	1,718	1,820	1,707	1,831	1,697	1,841
	0,01	1,664	1,684	1,653	1,693	1,643	1,704	1,633	1,715	1,623	1,725	1,613	1,735	1,603	1,746