

Przegląd wybranych testów

Testy dotyczące wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym i problem testowania równości średnich w dwóch zależnych populacjach o rozkładzie normalnym.

Model 1. Niech $X=(X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m, \sigma^2)$ przy czym σ^2 jest **znane**.

Testujemy hipotezę

1. $H_{0a}: m \geq m_0$ wobec alternatywy $H_{1a}: m < m_0$
2. $H_{0b}: m \leq m_0$ wobec alternatywy $H_{1b}: m > m_0$
3. $H_{0c}: m = m_0$ wobec alternatywy $H_{1c}: m \neq m_0$

Statystyką testową jest

$$T(X) = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma},$$

która przy ustalonym m ma rozkład $N(\sqrt{n} \frac{m - m_0}{\sigma}, 1)$. Zbiór krytyczny (odrzućenia H_0) C na poziomie α konstruuujemy następująco:

1. $C = \{X : T(X) \leq u_\alpha\}$ dla alternatywy $H_{1a}: m < m_0$
2. $C = \{X : T(X) \geq u_{1-\alpha}\}$ dla alternatywy $H_{1b}: m > m_0$
3. $C = \{X : |T(X)| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ dla alternatywy $H_{1c}: m \neq m_0$

gdzie u_α jest kwantylem rzędu α rozkładu $N(0,1)$

Uwaga. W przypadku 1 i 2 test jest jednostajnie najmocniejszy. W przypadku 3 test jest jednostajnie najmocniejszy w klasie testów nieobciążonych. Test jednostajnie najmocniejszy w tym przypadku nie istnieje.

Model 2. Niech $X=(X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m, \sigma^2)$ przy czym σ^2 jest **nieznane**.

Testujemy hipotezę

1. $H_{0a}: m \geq m_0$ wobec alternatywy $H_{1a}: m < m_0$
2. $H_{0b}: m \leq m_0$ wobec alternatywy $H_{1b}: m > m_0$
3. $H_{0c}: m = m_0$ wobec alternatywy $H_{1c}: m \neq m_0$

Statystyką testową jest $T(X) = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m_0}{S_n}$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,

która przy prawdziwości H_0 ma niecentralny rozkład t -Studenta o $n-1$ stopniach swobody i parametrze niecentralności $\lambda = \sqrt{n} \frac{m-m_0}{\sigma}$ (czyli $t_{n-1, \lambda}$). Zbiór krytyczny (odrzućmy H_0) C na poziomie α konstruujemy następująco:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $C = \{X : T(X) \leq u_\alpha\}$ | dla alternatywy $H_{1a}: m < m_0$ |
| 2. $C = \{X : T(X) \geq u_{1-\alpha}\}$ | dla alternatywy $H_{1b}: m > m_0$ |
| 3. $C = \{X : T(X) \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | dla alternatywy $H_{1c}: m \neq m_0$ |

gdzie u_α jest kwantylem rzędu α rozkładu centralnego t Studenta t_{n-1} .

Uwaga. W przypadku 1 i 2 test jest jednostajnie najmocniejszy. W przypadku 3 test jest jednostajnie najmocniejszy w klasie testów nieobciążonych. Test jednostajnie najmocniejszy w tym przypadku nie istnieje. Dla $n > 30$ rozkład t -Studenta aproksymujemy rozkładem normalnym $N(0,1)$.

Powyższe testy mogą być użyte do **porównywania wartości oczekiwanych w dwóch próbach zależnych o rozkładzie normalnym**.

Niech $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego

$N\left(\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_x & C_{xy} \\ C_{yx} & V_y \end{bmatrix}\right)$. Chcemy testować hipotezę

$H_0: m_x = m_y$ przeciwko alternatywie $H_0: m_x \neq m_y$

Z powyższym problemem mamy do czynienia, gdy dla tego samego pacjenta rejestrujemy dwa pomiary pewnej wielkości przed i po zażyciu leku.

Definiując zmienną $Z = Y - X$, którą możemy interpretować jako poprawę spowodowaną zażyciem leku dostajemy próbę prostą $(Z_1, \dots, Z_n)$ z rozkładu $N(m_z, \sigma^2)$, gdzie

$$m_z = m_y - m_x \text{ i } \sigma^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x & C_{xy} \\ C_{yx} & V_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i problem sprowadza się do testowania hipotezy $H_0: m_z = 0$ wobec alternatywy $H_1: m_z \neq 0$ (lub $m_z > 0$)

Testowanie równości średnich w dwóch niezależnych populacjach o rozkładzie normalnym.

Niech $X=(X_1, \dots, X_n)$ i $Y=(Y_1, \dots, Y_m)$ będą niezależnymi próbami prostymi z rozkładów $N(m_x, \sigma^2)$ i $N(m_y, \sigma^2)$ odpowiednio. Nieznana wariancja σ^2 jest **taka sama** w obu rozkładach.

Testujemy hipotezę

$$H_0: m_x = m_y \text{ wobec jednej z alternatyw } H_{1a}: m_x < m_y, H_{1b}: m_x > m_y, H_{1c}: m_x \neq m_y$$

Statystyką testową jest

$$T(X, Y) = \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2}},$$

która przy prawdziwości H_0 ma rozkład t -Studenta o $n+m-2$ stopniach swobody (czyli t_{n+m-2}). Zbiór krytyczny (odrzućenia H_0) C na poziomie α konstruujemy następująco:

1. $C = \{X : T(X) \leq u_\alpha\}$ dla alternatywy $H_{1a}: m_x < m_y$
2. $C = \{X : T(X) \geq u_{1-\alpha}\}$ dla alternatywy $H_{1b}: m_x > m_y$
3. $C = \{X : |T(X)| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ dla alternatywy $H_{1c}: m_x \neq m_y$

gdzie u_α jest kwantylem rzędu α rozkładu t_{n+m-2} .

Uwaga. W przypadku 1 i 2 test jest jednostajnie najmocniejszy. W przypadku 3 test jest jednostajnie najmocniejszy w klasie testów nieobciążonych. Test jednostajnie najmocniejszy w tym przypadku nie istnieje. Dla $n > 30$ rozkład t -Studenta aproksymujemy rozkładem normalnym $N(0,1)$.

Nieparametryczne odpowiedniki powyższych modeli testowania hipotez -testy Wilcoxona i Manna-Whitneya.

Rozważmy jeszcze raz problem porównywania dwóch prób zależnych. Niech $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ będzie próbą prostą z pewnego dwuwymiarowego rozkładu ciągłego. Sytuacja taka odpowiada np. pomiarowi pewnej zmiennej dla tych samych jednostek eksperymentalnych przed i po zastosowaniu terapii. Definiując zmienną $Z=Y-X$, którą możemy interpretować jako poprawę spowodowaną terapią, dostajemy próbę prostą $(Z_1, \dots, Z_n)$ z pewnego rozkładu ciągłego. Jeśli terapia jest nieskuteczna, czyli zmienne X i Y mają taki sam rozkład, to zmienna Z ma rozkład symetryczny wokół 0. Oznacza to że zmienne Z (poprawa) i $-Z$ (pogorszenie) mają taki sam rozkład. Oznaczając przez $F_Z(t)$ dystrybuantę zmiennej Z widać, że $F_{-Z}(t) = P(-Z \leq t) = 1 - P(-Z > t) = 1 - P(Z < -t) = 1 - F_Z(-t)$. Warunek symetryczności (wokół 0) rozkładu zmiennej Z przybiera postać $F_Z(t) + F_Z(-t) = 1$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Jeżeli skutkiem terapii jest przesunięcie rozkładu, to zmienna Z ma dystrybuantę $F(t - \Delta)$ gdzie F jest nieznaną dystrybuanta rozkładu symetrycznego względem 0 a parametr Δ nieznanym parametrem przesunięcia. Testowanie skuteczności terapii sprowadza się do testowania hipotezy o parametrze przesunięcia Δ .

Niech $Z_1, \dots, Z_n$ będzie próbą prostą z pewnego rozkładu $F(t - \Delta)$ gdzie F jest ciągłą dystrybuantą rozkładu symetrycznego (**względem zera**). Jest to oczywiście nieparametryczna rodzina rozkładów.

Parametrem jest para $(F, \Delta) \in \mathcal{F}_{\text{sym}} \times \mathbb{R}$ ($\mathcal{F}_{\text{sym}}$ jest zbiorem symetrycznych **względem zera** absolutnie ciągłych dystrybuant na $\mathbb{R}$).

Testujemy hipotezę

$H_0: \Delta = 0$ (terapia jest nieskuteczna)

wobec jednej z alternatyw

$H_{1a}: \Delta < 0$ albo $H_{1b}: \Delta > 0$ albo $H_{1c}: \Delta \neq 0$.

Dystrybuanta F jest w tym przypadku **parametrem zakłócającym**. Problem testowania jest niezmienniczy względem grupy wszystkich transformacji $z'_i = f(z_i)$, $i=1, \dots, n$ takich, że f jest **ciągła, nieparzysta i ściśle rosnąca**. Transformacje powyższe zachowują **znaki obserwacji i porządek bezwzględnych wartości obserwacji**.

Oznaczmy przez $R_i = \text{ranga } |Z_i|$ wśród $|Z_1|, \dots, |Z_n|$

Można pokazać (Lehmann), że **maksymalnym niezmiennikiem** jest zbiór rang $R_1, \dots, R_n$. Redukcja przez statystyki dostateczne zastosowana do maksymalnego niezmiennika prowadzi do rang $R_1^+, \dots, R_k^+$, odpowiadających **dodatnim** obserwacjom $Z_1, \dots, Z_n$ (których jest k).

Statystyka oparta na tym niezmienniku ma rozkład niezależny od dystrybuanty $F \in \mathcal{F}_{\text{sym}}$. Statystyką

testową jest statystyka **Wilcoxona** $W = \sum_{i=1}^k R_i^+$.

Oznaczmy przez $S_i = \begin{cases} 1, & X_i > 0 \\ 0, & X_i < 0 \end{cases}$ $i=1, \dots, n$ ciąg zmiennych losowych. Przy prawdziwości H_0 zmienne losowe

$S_1, \dots, S_n$ są niezależne o rozkładzie Bernoulliego $B(1, \frac{1}{2})$ więc $E(S_i) = \frac{1}{2}$ $V(S_i) = \frac{1}{4}$

Przy prawdziwości H_0 $E(W) = E(\sum_{i=1}^k R_i^+) = E(\sum_{i=1}^n r_i S_i) = \sum_{i=1}^n r_i E(S_i) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$

$V(W) = V(\sum_{i=1}^k R_i^+) = V(\sum_{i=1}^n r_i S_i) = \sum_{i=1}^n r_i^2 V(S_i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{1}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.

W zależności od hipotezy alternatywnej obszar krytyczny konstruujemy lewostronny, prawostronny, obustronny. Rozkład statystyki W jest tablicowany (Zieliński R, Zieliński W., Tablice statystyczne)

Dla $n > 16$ stosujemy aproksymację gaussowską

Statystyka $\frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$ ma dla $n > 16$ w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Problem dwóch prób

Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ oraz $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ będą dwiema niezależnymi próbami prostymi z rozkładów o ciągłych dystrybuantach odpowiednio F_X i F_Y .

Testujemy hipotezę

$$H_0: F_X = F_Y$$

wobec jednej z alternatyw

I (location)

$$H_1: F_Y(t) = F_X(t - \Delta) \quad \Delta \neq 0, \text{ albo } \Delta > 0, \text{ albo } \Delta < 0$$

II (scale)

$$H_1: F_Y(t) = F_X\left(\frac{t}{\sigma}\right), \quad \sigma > 0$$

III (Lehmann alternative)

$$H_1: F_Y(t) = 1 - (1 - F_X(t))^{\gamma+1}, \quad \gamma + 1 > 0,$$

IV (stochastic domination)

$$H_1: F_Y(t) \leq F_X(t) \quad \forall t \quad \text{ i } \quad \exists t: F_Y(t) \neq F_X(t)$$

V (general alternative)

$$H_1: F_Y(t) \neq F_X(t)$$

Ad III. W przypadku alternatywy Lehmana dla $\gamma \in N$, $F_Y(t) = 1 - (1 - F_X(t))^{\gamma+1}$ jest dystrybuantą minimum z $\gamma + 1$ zmiennych $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{\gamma+1})$

Ad IV $X <^{\text{st}} Y \Leftrightarrow F_Y(t) \leq F_X(t) \quad \forall t \quad \text{ i } \quad \exists t: F_Y(t) \neq F_X(t)$

W każdym z powyższych przypadków mamy do czynienia z nieparametrycznym problemem testowania. Musimy skonstruować rozsądną statystykę testową, której rozkład (przynajmniej przy prawdziwości $H_0: F_X = F_Y = F$ nie zależy od nieznannej dystrybuanty F . W przypadku testowania hipotezy $H_0: F_X = F_Y = F$ wobec alternatywy (location) $H_1: F_Y(t) = F_X(t - \Delta)$ lub alternatywy (stochastic domination) $H_1: F_Y(t) \leq F_X(t) \quad \forall t \quad \text{ i } \quad \exists t: F_Y(t) \neq F_X(t)$ problem testowania jest niezmienniczy względem grupy transformacji $x'_i = f(x_i)$, $y'_j = f(y_j)$ ($i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, gdzie f jest ciągłą i ściśle rosnącą bijekcją zbioru R na siebie. Niech $R_1, R_2, \dots, R_{n_1+n_2}$ będą rangami (kolejnymi numerami) odpowiednio obserwacji $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ w połączonej próbie $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ i $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$. Maksymalnym niezmiennikiem jest zbiór rang $R_1, R_2, \dots, R_{n_1+n_2}$. Oznaczmy przez $S = \{i_{n_1+1}, i_{n_1+2}, \dots, i_{n_1+n_2}\}$ zbiór indeksów odpowiadających obserwacjom $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$. Statystyką testową testu Manna-Whitneya-Wilcoxa (MWW) jest

$$W = \sum_{i \in S} R_i \quad (\text{czyli suma rang } Y\text{-ków})$$

Duże wartości statystyki $W = \sum_{i \in S} R_i$ świadczą przeciwko H_0 na rzecz $H_1: \Delta > 0$ a małe na rzecz $H_1:$

$\Delta < 0$. Z kolei zarówno duże i małe wartości W świadczą przeciwko H_0 na korzyść $H_1: \Delta \neq 0$.

Rozważmy schemat losowania bez zwracania n_2 elementowego podzbioru S ze zbioru $n = n_1 + n_2$

elementowego i oznaczmy przez $I_i(S) = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases}$, $i = 1, \dots, n$ dychotomiczną zmienną losową

określoną na zbiorze indeksów $\{1, \dots, n\}$.

Oczywiście $\pi_i = P(i \in S) = \frac{n_2}{n}$, $i = 1, \dots, n$ a dla $i \neq j$ $\pi_{ij} = P(i, j \in S) = \frac{n_2(n_2-1)}{n(n-1)}$.

$$E(I_i(S)) = \pi_i, \quad V(I_i(S)) = \pi_i(1 - \pi_i) = \frac{n_2}{n}(1 - \frac{n_2}{n}) = \frac{n_1 n_2}{n^2},$$

$$i \neq j \quad \text{cov}(I_i(S), I_j(S)) = \pi_{ij} - \pi_i \pi_j = -\frac{n_1 n_2}{n^2(n-1)}.$$

Widać, że

$$W = \sum_{i \in S} R_i = \sum_{i=1}^n r_i I_i(S).$$

Stąd przy prawdziwości H_0

$$E(W) = \sum_{i=1}^n r_i E(I_i(S)) = \sum_{i=1}^n r_i \frac{n_2}{n} = \frac{n_2}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{n_2}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n_2(n_1+n_2+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} V(W) &= \sum_{i=1}^n r_i^2 V(I_i(S)) + \sum_{i \neq j} r_i r_j \text{cov}(I_i(S), I_j(S)) = \frac{n_1 n_2}{n^2} \sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{n_1 n_2}{n^2(n-1)} \sum_{i \neq j} r_i r_j \\ &= \frac{n_1 n_2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} r_i r_j \right) = \frac{n_1 n_2}{n^2(n-1)} \left((n-1) \sum_{i=1}^n r_i^2 - \sum_{i \neq j} r_i r_j \right) = \frac{n_1 n_2}{n^2(n-1)} \left(n \sum_{i=1}^n r_i^2 - \sum_{i,j} r_i r_j \right) \\ &= \frac{n_1 n_2}{n^2(n-1)} \left(n \sum_{i=1}^n r_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2 \right) = \frac{n_1 n_2}{n^2(n-1)} \left(n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right) = \frac{n_1 n_2(n+1)}{n-1} \frac{n-1}{12} = \frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12} \end{aligned}$$

Znane są rozkłady statystyk testowych dla małych n_1 i n_2 (które nie zależą od F , zobacz Zieliński R.

Siedem wykładów...) i aproksymacja normalna dla dużych n_1 i n_2 (twierdzenie Hoeffdinga).

Statystyka $\frac{W - \frac{n_2(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}}$ ma rozkład zbieżny do rozkładu $N(0,1)$, gdy $\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty$.

Aproksymacja ta jest wystarczająco dokładna dla $\min(n_1, n_2) \geq 4$ i $n_1 + n_2 \geq 20$ (Plucińska).

Uwaga: Powyższy rozkład graniczny nie wynika z CTG Lindeberga Levy'ego, gdyż zmienne losowe

$I_i(S)$ w sumie $W = \sum_{i \in S} R_i = \sum_{i=1}^n r_i I_i(S)$ są zależne.

Test zgodności Kołmogorowa

Niech $X=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu o **ciągłej** dystrybuancie $F \in \mathcal{F}_c$. Niech $F_0 \in \mathcal{F}_c$ będzie ustaloną ciągłą dystrybuantą. Testujemy hipotezę

$$H_0: F=F_0 \text{ (hipoteza prosta)}$$

wobec jednej z alternatyw

$$H_{1a}: F < F_0 \text{ albo } H_{1b}: F > F_0 \text{ albo } H_{1c}: F \neq F_0.$$

Oznaczmy przez $\hat{F}_n$ dystrybuantę empiryczną i rozważmy następujące statystyki Kołmogorowa:

$$D_n^+ = \sup_x (\hat{F}_n(x) - F_0(x)),$$

$$D_n^- = \sup_x (F_0(x) - \hat{F}_n(x)),$$

$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F_0(x)|.$$

Niech $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ będzie wektorem statystyk pozycyjnych (próbą uporządkowaną).

Dowodzi się, że $D_n^+ = \max_i (\frac{i}{n} - F_0(X_{(i)}))$, $D_n^- = \max_i (F_0(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n})$, $D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\}$. **Przy prawdziwości H_0 rozkłady statystyk Kołmogorowa nie zależą od F_0 i są znane.** Znane są również rozkłady graniczne wyżej wymienionych statystyk. Duże wartości statystyki D_n^- świadczą na korzyść H_{1a} (przeciwko H_0). Podobnie duże statystyki D_n^+ świadczą na korzyść H_{1b} (przeciwko H_0) a duże statystyki D_n świadczą na korzyść H_{1c} (przeciwko H_0).

Jeżeli F_0 jest dystrybuantą rozkładu $N(m, \sigma^2)$, którego parametry m i σ^2 nie są znane lub dystrybuantą rozkładu wykładniczego $E(\lambda)$ z nieznanym parametrem λ , to dokładny rozkład statystyki D_n został wyznaczony przez Lillieforsa. Test Kołmogorowa Lillieforsa może być więc użyty do testowania hipotezy o normalności rozkładu.

Test zgodności chi-kwadrat

Rozważmy eksperyment, który może się zakończyć jednym z k różnych wyników $A_1, \dots, A_k$ przy czym

$$p_j = P(A_j); 0 < p_j < 1, j=1, \dots, k; \sum_{j=1}^k p_j = 1. \text{ Powtarzając eksperyment w niezmiennych warunkach } n \text{ razy}$$

rejestrujemy liczności poszczególnych zdarzeń. Niech X_j oznacza liczbę zaobserwowanych zdarzeń A_j .

Oczywiście

$$P(X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}; \quad \sum_{j=1}^k p_j = 1, \sum_{j=1}^k n_j = n.$$

Powyższy rozkład wielomianowy jest uogólnieniem rozkładu dwumianowego.

Chcemy testować hipotezę

$$H_0: (p_1, \dots, p_k) = (p_1^0, \dots, p_k^0) \text{ (hipoteza prosta)}$$

przeciwko

$$H_1: (p_1, \dots, p_k) \neq (p_1^0, \dots, p_k^0) \text{ (hipoteza złożona)}$$

Pearson udowodnił, że statystyka

$$\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \text{ ma graniczny } (n \rightarrow \infty) \text{ rozkład } \chi_{k-1}^2$$

Ponieważ statystyka Pearsona jest pewną miarą odstępstw liczności obserwowanych od oczekiwanych przy prawdziwości H_0 , "duże" wartości statystyki Pearsona świadczą przeciwko hipotezie H_0 . Wobec

tego H_0 należy odrzucić na poziomie α , jeżeli $\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} > \chi_{k-1}^2(1-\alpha)$, gdzie $\chi_{k-1}^2(1-\alpha)$ oznacza

kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu χ_{k-1}^2 .

Testowanie złożonej hipotezy zgodności

$$H_0: (p_1, \dots, p_k) = (p_1(\theta), \dots, p_k(\theta)), \text{ gdzie } \theta \in R^s; s < k-2 \text{ przeciwko } H_1: \sim H_0.$$

Niech $\hat{\theta}$ będzie estymatorem największej wiarygodności parametru θ . Oznaczmy $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta}); i=1, \dots, k$.

Wówczas statystyka $\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$ ma graniczny rozkład χ_{k-1-s}^2 .

Dalsza procedura jest kopią powyższej z jedyną modyfikacją dotyczącą ilości stopni swobody granicznego rozkładu χ_{k-1-s}^2 .

Test W Shapiro-Wilka

Jest to powszechnie uważany za "najlepszy" uniwersalny test normalności.

Niech $X=(X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu o **ciągłej** dystrybucji $F \in \mathcal{F}_c$.

Testujemy hipotezę

$$H_0: F = F_0, \text{ gdzie } F_0 \text{ jest dystrybucją rozkładu } N(m, \sigma^2) \text{ } m \text{ i } \sigma^2 \text{ nie są znane,}$$

wobec alternatywy

$$H_1: F \neq F_0$$

- Opis konstrukcji testu Domański C., Statystyczne testy nieparametryczne, PWE

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{in} (X_{(n+1-i)} - X_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Współczynniki a_{in} są tablicowane dla $n \leq 50$. Hipotezę zerową odrzucamy, gdy $W \leq w_{kryt}$. Dla

$n > 50$ są dostępne programy komputerowe obliczające te współczynniki.