

Jedno i wieloczynnikowa ANOVA. Interakcja czynników

Jak wiadomo ANOVA jest techniką, umożliwiającą przy pewnych założeniach (kluczowe jest założenie jednorodności wariancji w grupach), porównywanie wartości średnich (tzn. oczekiwanych) interesującej nas zmiennej zwanej **odpowiedzią (response)** w wielu grupach. Zmienną jakościową, wyznaczającą podział na grupy nazywamy **czynnikiem**. Np. płeć jest czynnikiem o 2 poziomach M i K. Jeżeli podział na grupy został dokonany za pomocą jednego czynnika to mówimy o **jednoczynnikowej ANOVA**. Jeżeli podział nastąpił w oparciu o 2 czynniki to mówimy o **dwuczynnikowej ANOVA**. Możemy również mówić o wieloczynnikowej ANOVA.

Zapis jedno i wieloczynnikowej ANOVA w postaci GLM

Rozważmy jako przykład 2-czynnikową ANOVA z czynnikami

- BLOK o dwóch poziomach A i B
- ZABIEG o trzech poziomach: I, II i III.

Przypuśćmy że liczność obserwacji odpowiedzi w poszczególnych grupach (klatkach) są jak niżej

	ZABIEG			
BLOK	I	II	III	Razem
A	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{1+}
B	n_{21}	n_{22}	n_{32}	n_{2+}
Razem	n_{+1}	n_{+2}	n_{+3}	n

Wypiszmy wartości oczekiwane w poszczególnych grupach

	ZABIEG		
BLOK	I	II	III
A	m_{AI}	m_{AII}	m_{AIII}
B	m_{BI}	m_{BII}	m_{BIII}

Model można zapisać w postaci (parametryzacja z sigma ograniczeniami)

$$X_{ijk} = m + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad i=1,2; j=1,2,3$$

gdzie

i oznacza poziom czynnika BLOK

j oznacza poziom czynnika ZABIEG

k oznacza numer obserwacji (w każdej klatce obserwacje numerujemy od początku).

Oznaczając przez n_{ij} ilość obserwacji w klatce (i,j) zwykle przyjmujemy ograniczenia

$$\sum_i n_{i+} \alpha_i = 0 \quad , \quad \sum_j n_{+j} \beta_j = 0 .$$

Uwaga. Możliwe są różne sigma ograniczenia. W podręcznikach przeważa ta parametryzacja wynikająca z zasady

$$\sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i = 0 \Leftrightarrow \sum_i n_{i+} \alpha_i = 0, \quad \sum_i \sum_j \sum_k \beta_j = 0 \Leftrightarrow \sum_j n_{+j} \beta_j = 0$$

Powyższy model można zapisać również w postaci (używając parametryzacji oszczędnej) (jak w **R**)

$$X_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 a_1^i + \beta_2 a_2^j + \beta_3 a_3^j + \varepsilon_{ijk}$$

gdzie

$a_1^i = 1$ gdy czynnik BLOK jest na poziomie B i $a_1^i = 0$ w przeciwnym przypadku,

$a_2^j = 1$ gdy czynnik ZABIEG jest na poziomie II i $a_2^j = 0$ w przeciwnym przypadku,

$a_3^j = 1$ gdy czynnik ZABIEG jest na poziomie III i $a_3^j = 0$ w przeciwnym przypadku.

$$A \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$B \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Po wyliczeniu wartości oczekiwanych w poszczególnych grupach

	ZABIEG		
BLOK	I	II	III
A	β_0	$\beta_0 + \beta_2$	$\beta_0 + \beta_3$
B	$\beta_0 + \beta_1$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_3$

parametry interpretujemy następująco

$$\beta_0 = m_{A I},$$

$$\beta_1 = m_{B I} - m_{A I} = m_{B II} - m_{A II} = m_{B III} - m_{A III} = m_{B+} - m_{A+},$$

$$\beta_2 = m_{A II} - m_{A I} = m_{B II} - m_{B I} = m_{+II} - m_{+I}$$

$$\beta_3 = m_{A III} - m_{A I} = m_{B III} - m_{B I} = m_{+III} - m_{+I}$$

przy czym np.

$m_{A I}$ oznacza wartość oczekiwaną w grupie BLOK=A i ZABIEG=I,

m_{A+} oznacza wartość oczekiwaną w BLOKU A bez względu na poziom zabiegu.

Jak widać w powyższym 2-czynnikowym modelu ANOVA **wpływ obu czynników jest addytywny.**

Jest to 2-czynnikowy model ANOVA efektów głównych

Uwaga. Statistica stosuje następującą parametryzację

$$X_{ijk} = m + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad i=1,2; j=1,2,3$$

$$\sum_i \alpha_i = 0, \quad \sum_j \beta_j = 0 \implies \alpha_2 = -\alpha_1, \quad \beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$$

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \varepsilon$$

Wartości oczekiwane w poszczególnych grupach są następujące

BLOK	ZABIEG		
	I	II	III
A	$m + \alpha_1 + \beta_1$	$m + \alpha_1 + \beta_2$	$m + \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2$
B	$m - \alpha_1 + \beta_1$	$m - \alpha_1 + \beta_2$	$m - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2$

Można także dla rozważanego przypadku zbudować ogólniejszy model uwzględniający **interakcję** BLOK $\times$ ZABIEG, a mianowicie

$$X_{ijk} = m + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i=1,2; j=1,2,3, \text{ przy czym}$$

$$\sum_i n_{i+} \alpha_i = 0, \sum_j n_{+j} \beta_j = 0, \sum_i n_{ij} \gamma_{ij} = 0 \text{ dla każdego } j, \sum_j n_{ij} \gamma_{ij} = 0 \text{ dla każdego } i.$$

Uwaga. Możliwe są różne sigma ograniczenia. W podręcznikach przeważa wariant

$$(\forall j) \sum_i \sum_k \gamma_{ij} = 0 \Leftrightarrow (\forall j) \sum_i n_{ij} \gamma_{ij} = 0 \quad (\forall i) \sum_j \sum_k \gamma_{ij} = 0 \Leftrightarrow (\forall i) \sum_j n_{ij} \gamma_{ij} = 0$$

Używając **parametryzacji oszczędnej** powyższy model można zapisać w postaci

$$X_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 a_1^i + \beta_2 a_2^j + \beta_3 a_3^j + \beta_4 a_1^i a_2^j + \beta_5 a_1^i a_3^j + \varepsilon_{ijk}$$

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \varepsilon$$

Interpretacja parametrów modelu nie jest już tak natychmiastowa.

BLOK	ZABIEG		
	I	II	III
A	β_0	$\beta_0 + \beta_2$	$\beta_0 + \beta_3$
B	$\beta_0 + \beta_1$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_4$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_3 + \beta_5$

$$\beta_0 = m_{A I},$$

$$\beta_1 = m_{B I} - m_{A I},$$

$$\beta_2 = m_{A II} - m_{A I},$$

$$\beta_3 = m_{AIII} - m_{AI},$$

$$\beta_4 = (m_{AI} + m_{BII}) - (m_{BI} + m_{AII}),$$

$$\beta_5 = (m_{AI} + m_{BIII}) - (m_{BI} + m_{AIII}).$$

Warto zauważyć, że występowanie interakcji tzn. parametrów β_4 i β_5 w modelu zmienia interpretację pozostałych parametrów: np. w przypadku występowania interakcji

$\beta_1 = m_{BI} - m_{AI}$ (różnica pomiędzy wartościami oczekiwanymi w bloku B i w bloku A dla zabiegu I)

a w przypadku jej braku

$\beta_1 = m_B - m_A$ (różnica pomiędzy wartościami oczekiwanymi w bloku B i w bloku A dla wszystkich zabiegów).

Przy obecności interakcji różnice średnich poziomów czynnika BLOK są modyfikowane przez poziomy czynnik ZABIEG i odwrotnie.

W parametryzacji Statistica model z interakcją wygląda następująco

$$X_{ijk} = m + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i=1,2; j=1,2,3, \text{ przy czym}$$

$$\sum_i \alpha_i = 0, \sum_j \beta_j = 0, (\forall j) \sum_i \gamma_{ij} = 0; (\forall i) \sum_j \gamma_{ij} = 0$$

$$A \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} \quad B \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \varepsilon.$$

Wyznaczając wartości oczekiwane w poszczególnych grupach otrzymujemy układ

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{AI} = m + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ m_{AII} = m + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_2 \\ m_{AIII} = m + \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2 \\ m_{BI} = m - \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 \\ m_{BII} = m - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_2 \\ m_{BIII} = m - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{1}{6}(m_{AI} + m_{AII} + m_{AIII} + m_{BI} + m_{BII} + m_{BIII}) \\ \alpha = \frac{1}{6}(m_{AI} + m_{AII} + m_{AIII} - m_{BI} - m_{BII} - m_{BIII}) \\ \beta_1 = \frac{1}{6}(2m_{AI} - m_{AII} - m_{AIII} + 2m_{BI} - m_{BII} - m_{BIII}) \\ \beta_2 = \frac{1}{6}(-m_{AI} + 2m_{AII} - m_{AIII} - 2m_{BI} + 2m_{BII} - m_{BIII}) \\ \gamma_1 = \frac{1}{6}(2m_{AI} - m_{AII} - m_{AIII} - 2m_{BI} + m_{BII} + m_{BIII}) \\ \gamma_2 = \frac{1}{6}(-m_{AI} + 2m_{AII} + m_{AIII} - 2m_{BI} - 2m_{BII} + m_{BIII}) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{1}{6}(m_{AI} + m_{AII} + m_{AIII} + m_{BI} + m_{BII} + m_{BIII}) \\ \alpha = \frac{1}{6}(m_{A+} - m_{B+}) \\ \beta_1 = \frac{1}{6}(2m_{+I} - m_{+II} - m_{+III}) \\ \beta_2 = \frac{1}{6}(-m_{+I} + 2m_{+II} - m_{+III}) \\ \gamma_1 = \frac{1}{6}(2(m_{AI} - m_{BI}) - (m_{AII} - m_{BII}) - (m_{AIII} - m_{BIII})) \\ \gamma_2 = \frac{1}{6}((-m_{AI} - m_{BI}) + 2(m_{AII} - m_{BII}) - (m_{AIII} - m_{BIII})) \end{array} \right.$$

Klasyfikacja krzyżowa i hierarchiczna

Rozważmy 2 czynniki ANOVA

- Jeżeli każdy poziom jednego czynnika może występować przy każdym poziomie drugiego czynnika, to klasyfikację nazywamy krzyżową
- Jeżeli pewne poziomy czynnika II występują tylko przy pewnych poziomach czynnika I to mówimy o klasyfikacji zagnieżdżonej (nested) czynnik II jest zagnieżdżony wewnątrz czynnika I

Rozważmy 2 czynniki ANOVA z czynnikiem I o 3 poziomach i czynnikiem II i 7 poziomach

Jeśli tabela licznosci jest postaci (x oznacza w klatce są obserwacje)

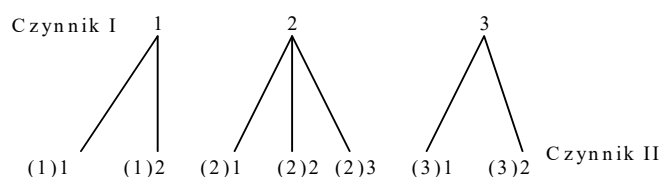
		II						
		1	2	3	4	5	6	7
I	1	x	x	x	x	x	x	x
	2	x	x	x	x	x	x	x
	3	x	x	x	x	x	x	x

To mamy do czynienia z klasyfikacją krzyżową

Jeśli macierz licznosci jest postaci

		II						
		1	2	3	4	5	6	7
I	1	x	x					
	2			x	x	x		
	3						x	x

to mamy do czynienia z klasyfikacją hierarchiczną (czynnik II zagnieżdżony w czynniku I)



Plany zrównoważone i niezrównoważone - plany ortogonalne

W przypadku 1-czynnikowej ANOVA plan eksperymentu jest **zrównoważony (balanced)**, jeżeli dla każdego poziomu czynnika mamy **tyle samo obserwacji**. W wieloczynnikowej ANOVA przy **klasyfikacji krzyżowej** plan jest zrównoważony, jeżeli mamy **równe ilości obserwacji w klatkach**.

Plan nie będący planem zrównoważonym nazywamy planem niezrównoważonym.

Plany zrównoważone są szczególnymi przypadkami planów ortogonalnych, które wyjaśnimy na przykładzie klasyfikacji 2 kierunkowej (2 czynnikiowa klasyfikacja krzyżowa)

Plan 2 czynnikowej klasyfikacji krzyżowej nazywamy ortogonalnym jeżeli macierz licznosci ma proporcjonalne wiersze i proporcjonalne kolumny

Przykład macierzy licznosci planu ortogonalnego (ze współczynnikami proporcjonalności).

		2	1,5	2,5	
		2	4	3	5
4		8	16	12	20
2		4	8	6	10
1		2	4	3	5
3		6	12	9	15

Analiza kowariancji ANCOVA - ANOVA z uwzględnieniem zmiennej towarzyszącej.

Rozważmy dla prostoty problem porównania średnich w **trzech** grupach przy czym oprócz odpowiedzi X obserwujemy także zmienną towarzyszącą T (covariate).

$$\begin{bmatrix} X_{11} \\ \vdots \\ X_{1n_1} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{2n_2} \\ X_{31} \\ \vdots \\ X_{3n_3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_{11} \\ \vdots \\ T_{1n_1} \\ T_{21} \\ \vdots \\ T_{2n_2} \\ T_{31} \\ \vdots \\ T_{3n_3} \end{bmatrix}$$

Model ANCOVA

$$X_{ij} = m_i + \gamma T_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad i=1,2,3 ; j=1,\dots,n_i$$

Przyjmując pierwszą grupę jako grupę referencyjną (**tak jest w programie R**) otrzymujemy model

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \beta_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix} \beta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \beta_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenia $m = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3)$, $\alpha_i = m_i - m$, $i=1,2,3$

otrzymujemy model $X_{ij} = m + \alpha_i + \gamma T_{ij} + \varepsilon_{ij}$ z ograniczeniami $\sum_i \alpha_i = 0$, który w parametryzacji Statistica wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} m + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

Jak widać, w modelu ANCOVA zakłada się taki sam charakter wpływu zmiennej towarzyszącej na odpowiedź (**model jednakowych nachyleń**). Jeśli z pewnych względów nachylenia (parametr γ) nie jest taki sam w poszczególnych grupach, to należy rozważyć interakcję zmiennej towarzyszącej i czynnika wyznaczającego podział na grupy. Dostaniemy wówczas **model różnych nachyleń**.

Parametryzacja R

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} m + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \gamma_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma_2 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

Parametryzacja Statistica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} m + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_2 \\ -\mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \gamma_2 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

W modelu ANCOVA jednakowych nachyleń testowanie hipotezy H_0 : "Grupy nie różnią się między sobą" sprowadza się do testowania hipotezy $\beta_1 = \beta_2 = 0$, (w Statistica $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$).

Testowanie hipotezy H_0 : "Zmienna towarzysząca T nie ma wpływu na Odpowiedź" sprowadza się do testowania hipotezy $\gamma = 0$.

W modelu różnych nachyleń testowanie hipotezy H_0 : "Zmienna towarzysząca T nie ma wpływu na Odpowiedź" $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

W modelu różnych nachyleń testowanie hipotezy o **jednakowych nachyleniach** (czyli o równoległości linii regresji w grupach) sprowadza się do testowania hipotezy $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Po wyestymowaniu parametrów modelu metodą MNK możemy wyznaczyć tzw. oczekiwane średnie brzegowe

$$\bar{X}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma} \bar{T}_1; \quad \bar{X}_2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\gamma} \bar{T}_2; \quad \bar{X}_3 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 + \hat{\gamma} \bar{T}_3$$

oraz skorygowane średnie brzegowe

$$\bar{X}_{1,adj} = \hat{\beta}_0 + \hat{\gamma} \bar{T}; \quad \bar{X}_{2,adj} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\gamma} \bar{T}; \quad \bar{X}_{3,adj} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 + \hat{\gamma} \bar{T},$$

które wnoszą poprawki ze względu na różnice średnich poziomów zmiennych towarzyszących w grupach.

Widać, że $\bar{X}_i - \bar{X}_{i,adj} = \hat{\gamma}(\bar{T}_i - \bar{T})$

Może się zdarzyć, że średnie, które wydają się początkowo różne, po uwzględnieniu wpływu zmiennej towarzyszącej mogą okazać się nieistotnie różne lub odwrotnie.

Ogólnie model ANCOVA można zapisać w postaci

$$[\mathbf{X}] = [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + [\boldsymbol{\varepsilon}],$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą planu eksperymentu bez zmiennych towarzyszących (model ANOVA) a $\mathbf{C}$ jest macierzą planu której kolumny stanowią obserwacje zmiennych towarzyszących.

Widać że w porównaniu do modelu ANOVA

$$[\mathbf{X}] = [\mathbf{A}][\boldsymbol{\beta}] + [\boldsymbol{\varepsilon}]$$

zmieniła się macierz planu eksperymentu

Oczywiście w modelu ANOVA $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ANOVA} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{X}$

W modelu ANCOVA układ równań normalnych jest postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

Wykorzystując wzory na odwracanie macierzy w postaci blokowej można wyprowadzić wzory na poprawione $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ANCOVA}$ uwzględniające obecność zmiennych towarzyszących.

Uwaga. W monografii Rao R.C., Liniowe modele statystyki matematycznej str. 301 można znaleźć jawne wzory i ich geometryczną interpretację

Model efektów losowych- model II komponentów wariancyjnych

Dotychczas rozważane modele ANOVA to tzw. **modele efektów stałych** albo **modele I**. W modelu efektów stałych poziomy czynników są z góry ustalone i interesują nas hipotezy liniowe dotyczące tylko tych rozważanych poziomów. Jeżeli z pewnych względów traktujemy poziomy czynnika nie jako z góry ustalone ale jako wylosowane z pewnej hipotetycznej populacji poziomów to taki model nazywamy modelem efektów losowych (model II)

Model jednoczynnikowej ANOVA - wariant efektów losowych - z k poziomami rozważanego czynnika może być tak jak w przypadku modelu efektów stałych zapisany w postaci

$$X_{ij} = m + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i=1, \dots, k, \quad j=1, \dots, n_i$$

gdzie

m oznacza średnią ogólną (w połączonych grupach)

α_i jest obserwacją zmiennej losowej odzwierciedlającą wpływ i tego poziomu rozważanego czynnika wylosowanego z pewnej populacji poziomów.
Zakładamy, że

- α_i ma rozkład $N(0, \sigma_\alpha^2)$
- $\alpha_i \quad i=1, \dots, k$ są niezależne
- ε_{ij} składnik losowy (niezależne zmienne losowe o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$)
- zmienne α_i oraz ε_{ij} są niezależne.

Testowana jest hipoteza (**nie jest to hipoteza liniowa !**)

$$H_0: \sigma_\alpha^2 = 0 \quad \text{przeciwko alternatywie}$$

$$H_1: \sigma_\alpha^2 \neq 0.$$

Dla przypomnienia **model efektów stałych** w tym przypadku jest postaci

$$X_{ij} = m + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i=1, \dots, k; \quad j=1, \dots, n_i$$

$$\varepsilon_{ij} \quad \text{iid } N(0, \sigma^2)$$

$$\sum_i^k n_i \alpha_i = 0$$

Różnice

- W modelu efektów losowych nie ma sigma ograniczeń, gdyż poziomy są losowe i nie możemy ich kontrolować
- W modelu efektów stałych obserwacje X_{ij} są niezależne i $X_{ij} \sim N(m + \alpha_i, \sigma^2)$ a w modelu efektów losowych $E(X_{ij}) = m$ - wszystkie obserwacje mają wspólną wartość oczekiwaną

$$V(X_{ij}) = \sigma_a^2 + \sigma^2$$

W modelu efektów losowych obserwacje z tej samej klasy są skorelowane

$$\rho(X_{ij}, X_{ik}) = \frac{\text{Cov}(X_{ij}, X_{ik})}{\sqrt{V(X_{ij}) V(X_{ik})}} = \frac{E(X_{ij} - m)(X_{ik} - m)}{\sigma_a^2 + \sigma^2} = \frac{E(a_i + \varepsilon_{ij})(a_i + \varepsilon_{ik})}{\sigma_a^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma^2}$$

Współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi z tej samej klasy (grupy) nosi nazwę współczynnika korelacji wewnątrzklasowej.

W modelu II efektów losowych wektor obserwacji ma więc następujący rozkład

$$\mathbf{X} \sim N \left(\mathbf{1}m, \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_k \end{bmatrix} \right), \text{ gdzie } \mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 + \sigma^2 & \cdots & \sigma_a^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_a^2 & \cdots & \sigma_a^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$