

Hipotezy ortogonalne

Rozważamy model liniowy:

$$X = \varphi + \varepsilon$$

gdzie

$X \in R^n$ jest wektorem obserwacji

$\varphi \in \Omega \subset R^n$ jest wektorem średnich (wartości oczekiwanych), o którym wiadomo, leży w pewnej właściwej podprzestrzeni liniowej Ω przestrzeni R^n , tzn. $\Omega \subset R^n$ i $\dim(\Omega) < n$

$\varepsilon \in R^n$ jest losowym wektorem błędów o rozkładzie $\varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Rozważmy **dwie hipotezy liniowe** specyfikujące 2 podprzestrzenie liniowe $\omega_1 \subset \Omega$ i $\omega_2 \subset \Omega$

przestrzeni Ω . **Hipotezę liniową będziemy utożsamiać z podprzestrzenią, którą ona specyfikuje.**

Oczywiście $\omega_1 \cap \omega_2 \subset \Omega$ jest podprzestrzenią liniową

Potrafiemy już testować hipotezę

$$H_0: \varphi \in \omega_1 \cap \omega_2 \subset \Omega$$

przeciwnie $H_1: \varphi \in \Omega - \omega_1 \cap \omega_2$,

ale jeśli test odrzuci hipotezę $H_0: \varphi \in \omega_1 \cap \omega_2 \subset \Omega$, to chcielibyśmy wiedzieć czy fałszywą jest hipoteza ω_1 czy ω_2 czy obie jednocześnie. Nie zawsze jest to możliwe

Przykład. Model regresji liniowej

$$x_i = \beta_0 + \beta_1 a_i + \beta_2 b_i + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

ε_i i.i.d. $N(0, \sigma^2)$, który można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Jeżeli chcemy zbadać czy zmienna a wpływa na wynik (odpowiedź) x , to testujemy hipotezę

$$\beta_1 = 0 \text{ (zmienna } a \text{ nie ma wpływu na } x) \quad \text{która specyfikuje } \omega_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right\}.$$

Jeżeli chcemy zbadać czy zmienna b wpływa na wynik (odpowiedź) x , to testujemy hipotezę

$$\beta_2 = 0 \text{ (zmienna } a \text{ nie ma wpływu na } x), \text{ która specyfikuje } \omega_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\}$$

Jeżeli testujemy hipotezę o braku wpływu zmiennych a i b na odpowiedź x , to testujemy hipotezę

$$\beta_1 = 0 \text{ i } \beta_2 = 0 \quad \text{która specyfikuje } \omega_1 \cap \omega_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Może się jednak okazać, że nie potrafimy oddzielić od siebie wpływów zmiennych (tu nie losowych) a i b . Jeżeli

wektory $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ są sobie równe, to parametry β_1 i β_2 są nieidentyfikowalne a suma $\beta_1 + \beta_2$ może być

identyfikowalna, gdy $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \neq \text{const} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Wówczas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + (\beta_1 + \beta_2) \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

W mniej skrajnych przypadkach kolumny macierzy planu mogą być „prawie liniowo zależne” co skutkuje tw. złym uwarunkowaniem i testy hipotezy $\beta_1=0$ i hipotezy $\beta_2=0$ mogą być słabe a test hipotezy $\beta_1+\beta_2=0$ może być całkiem mocny.

Estymowalność i testowalność

Rozważmy model $X = A\beta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I)$

Def. Liniowa funkcja parametryczna $c^T \beta$ jest (nieobciążenie) estymowalna, gdy istnieje liniowy nieobciążony estymator $b^T X$ tej funkcji.

WKW estymowalności $E(b^T X) = b^T E(X) = b^T A\beta = c^T \beta \quad \forall \beta \Leftrightarrow A^T b = c \Leftrightarrow c \in \text{Im}(A^T)$
(wiersz c^T jest liniową kombinacją wierszy macierzy A)

Def. Hipoteza liniowa $H\beta=0$ jest testowalna, jeżeli estymowalne są wszystkie liniowe funkcje parametryczne generowane przez wiersze macierzy H

WKW testowalności : $\text{Im}(H^T) \subset \text{Im}(A^T)$
(wiersze macierzy H są liniowymi kombinacjami wierszy macierzy A)

Wracamy do modelu

$$X = \varphi + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I), \quad \varphi \in \Omega \subset R^n, \quad \dim(\Omega) < n$$

Rozważmy hipotezy $H_0^1: \varphi \in \omega_1 \subset \Omega$ i $H_0^2: \varphi \in \omega_2 \subset \Omega$

Oczywiście $\Omega = \omega_1 \oplus \omega_1^\perp$ i $\Omega = \omega_2 \oplus \omega_2^\perp$ (sumy proste)

Def. Hipotezy ω_1 i ω_2 nazywamy hipotezami ortogonalnymi gdy przestrzenie $\omega_1^\perp$ i $\omega_2^\perp$ są ortogonalne

Z warunku ortogonalności hipotez ω_1 i ω_2 czyli z warunku $\omega_1^\perp \perp \omega_2^\perp$ wynika

$$\omega_1^\perp \subset \omega_2 \quad (\text{bo } \Omega = \omega_2 \oplus \omega_2^\perp)$$

$$\omega_2^\perp \subset \omega_1 \quad (\text{bo } \Omega = \omega_1 \oplus \omega_1^\perp)$$

zatem $\dim(\omega_1 + \omega_2) \geq \dim(\omega_1 + \omega_1^\perp) = \dim(\Omega)$ (sumy algebraiczne)

Ale $(\omega_1 + \omega_2) \subset \Omega$ stąd $\dim(\omega_1 + \omega_2) \leq \dim(\Omega)$.

Wobec tego dzięki ortogonalności hipotez ω_1 i ω_2 (czyli $\omega_1^\perp \perp \omega_2^\perp$) mamy $\dim(\omega_1 + \omega_2) = \dim(\Omega)$.

Oznaczmy odpowiednio

$$q = \dim(\omega_1 \cap \omega_2)$$

$$r_1 = \dim(\omega_1) \quad (\text{tzn macierz } H_1 \text{ jest typu } (s - r_1, s) \text{ pełnego rzędu –specyfikuje } s - r_1 \text{ ograniczeń})$$

$$r_2 = \dim(\omega_2) \quad (\text{tzn macierz } H_2 \text{ jest typu } (s - r_2, s) \text{ pełnego rzędu –specyfikuje } s - r_2 \text{ ograniczeń})$$

$$s = \dim(\Omega)$$

Warunek ortogonalności badanych hipotez pozwala napisać fundamentalny związek pomiędzy wymiarami odpowiednich przestrzeni

$$s = r_1 + r_2 - q$$

Postać kanoniczna

Wprowadźmy w R^n nową bazę **ortonormalną** $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ tak aby

$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q$	baza w $\omega_1 \cap \omega_2$
$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q, \mathbf{e}'_{q+1}, \dots, \mathbf{e}'_{r_1}$	baza w ω_1
$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q, \mathbf{e}'_{r_1+1}, \dots, \mathbf{e}'_s$	baza w ω_2
$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q, \mathbf{e}'_{q+1}, \dots, \mathbf{e}'_{r_1}, \mathbf{e}'_{r_1+1}, \dots, \mathbf{e}'_s$	baza w Ω
$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q, \mathbf{e}'_{q+1}, \dots, \mathbf{e}'_{r_1}, \mathbf{e}'_{r_1+1}, \dots, \mathbf{e}'_s, \mathbf{e}'_{s+1}, \dots, \mathbf{e}'_n$	baza w R^n

Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą przejścia od **starej bazy kanonicznej** do nowej bazy $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$

Oznacza to, że $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \mathbf{e}_i$. Macierz $\mathbf{P}$ jest oczywiście macierzą ortogonalną. Związek pomiędzy

współrzednymi $\mathbf{x}$ wektora w starej bazie i jego współrzednymi $\mathbf{x}'$ w nowej bazie jest postaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}' \text{ lub równoważnie } \mathbf{x}' = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$$

Ponieważ w bazie kanonicznej możemy utożsamiać wektor z jego zestawem współrzednych w bazie kanonicznej, kolumny macierzy $\mathbf{P}$ (wiersze $\mathbf{P}^T$) są zestawione z wektorów nowej bazy $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$

Wektor $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ leżący w przestrzeni $\text{Im}(\mathbf{A})$ rozpinanej także przez $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_s)$ może być zapisany w

$$\text{postaci } \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^s \gamma_i \mathbf{e}'_i$$

Mnożąc obustronnie $\mathbf{X} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ przez $\mathbf{P}^T$ otrzymujemy

$$\mathbf{P}^T \mathbf{X} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}^T \sum_{i=1}^s \gamma_i \mathbf{e}'_i + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon}$$

Oznaczając $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^T \mathbf{X}$ $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ otrzymujemy równoważny model w postaci kanonicznej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r_1-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r_2-q} \\ & & & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad \text{przy czym} \quad \boldsymbol{\eta} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{kan} \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}$$

Dla modelu w postaci kanonicznej hipoteza H_0 przybiera postać

$$H_0^1: \quad \boldsymbol{\varphi} \in \omega_1 \Leftrightarrow \gamma_{r_1+1} = 0, \dots, \gamma_s = 0$$

$$H_0^2: \quad \boldsymbol{\varphi} \in \omega_2 \Leftrightarrow \gamma_{q+1} = 0, \dots, \gamma_{r_1} = 0$$

$$H_0^{1,2}: \quad \boldsymbol{\varphi} \in \omega_1 \cap \omega_2 \Leftrightarrow \gamma_{q+1} = 0, \dots, \gamma_{r_1} = 0, \gamma_{r_1+1} = 0, \dots, \gamma_s = 0$$

Ponieważ przekształcenie ortogonalne zachowuje normę więc prawdziwe są równości

$$R_0 = \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}_{kan} \hat{\boldsymbol{\gamma}}\|^2 = \sum_{i=s+1}^n Y_i^2 = Y_{s+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

reszkowa suma kwadratów (wewnątrzgrupowa) w modelu bezwarunkowym .

$$R_1 = \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}_{kan} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\|^2 = Y_{r_1+1}^2 + \dots + Y_s^2 + Y_{s+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

reszkowa suma kwadratów w modelu warunkowym przy H_0^1

$$R_2 = \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}_{kan} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2\|^2 = Y_{q+1}^2 + \dots + Y_{r_1}^2 + Y_{s+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

reszkowa suma kwadratów w modelu warunkowym przy H_0^2

$$R_{12} = \|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}_{kan} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{1,2}\|^2 = Y_{q+1}^2 + \dots + Y_{r_1}^2 + Y_{r_1+1}^2 + \dots + Y_s^2 + Y_{s+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

reszkowa suma kwadratów w modelu warunkowym przy $H_0^1 \wedge H_0^2$

Widać, że zmienne

$$R_1 - R_0 = Y_{r_1+1}^2 + \dots + Y_s^2$$

$$R_2 - R_0 = Y_{q+1}^2 + \dots + Y_{r_1}^2$$

$$R_0 = Y_{s+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

są niezależne i

$$R_{12} - R_0 = (R_2 - R_0) + (R_1 - R_0) = Y_{q+1}^2 + \dots + Y_{r_1}^2 + Y_{r_1+1}^2 + \dots + Y_s^2.$$

Ponadto (oznaczając przez $P_{\omega_i} \boldsymbol{\varphi}$ rzut wektora $\boldsymbol{\varphi} = E(\mathbf{X})$ na przestrzeń ω_i)

- $\frac{R_1 - R_0}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{s-r_1, δ_1}^2 przy czym $\delta_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=r_1+1}^s \gamma_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\boldsymbol{\varphi} - P_{\omega_1} \boldsymbol{\varphi}\|^2$
- $\frac{R_2 - R_0}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{s-r_2, δ_2}^2 przy czym $\delta_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=q+1}^{r_1} \gamma_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\boldsymbol{\varphi} - P_{\omega_2} \boldsymbol{\varphi}\|^2$
- $\frac{R_0}{\sigma^2}$ ma rozkład χ_{n-s}^2

Podsumowaniem jest następująca

Tabela ANOVA

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat	Iloraz F
Hipoteza ω_1	$R_1 - R_0$	$s - r_1$	$m_1 = \frac{1}{s - r_1} (R_1 - R_0)$	$F_1 = \frac{m_1}{m_0}$
Hipoteza ω_2	$R_2 - R_0$	$s - r_2$	$m_2 = \frac{1}{s - r_2} (R_2 - R_0)$	$F_2 = \frac{m_2}{m_0}$
Hipoteza $\omega_1 \cap \omega_2$	$R_{12} - R_0$	$s - q$	$m_{12} = \frac{1}{s - q} (R_{12} - R_0)$	$F_{12} = \frac{m_{12}}{m_0}$
Błąd (wewnątrz grup)	R_0	$n - s$	$m_0 = \frac{1}{n - s} R_0$	
Ogółem	$R_{1,2}$	$n - q$		

Warto na etapie planowania eksperymentu zadbać o to by interesujące nas hipotezy były ortogonalne, gdyż ortogonalność umożliwia oprócz testowania łącznej hipotezy liniowej także testowanie hipotez składowych a statystyki testowe dla tych hipotez szczegółowych są niezależne

Zadanie. Pokazać że w modelu efektów głównych dwuczynnikowej ANOVA plan z macierzą licznosci

1	2
2	4

prowadzi do ortogonalnych hipotez a plan z macierzą licznosci

1	2
2	3

nie prowadzi do ortogonalnych hipotez.

Rozwiązanie

Przy parametryzacji oszczędnej macierz planu jest postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Oznaczając przez } \mathbf{a}_1,$$

$\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$ kolejne kolumny macierzy planu mamy

$$\omega_1 = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}, \quad \omega_1^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\omega_2 = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}, \quad \omega_2^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}.$$

Widać, że $\langle \omega_1^\perp, \omega_2^\perp \rangle = 0$, czyli $\omega_1^\perp \perp \omega_2^\perp$, więc hipotezy ω_1 i ω_2 są ortogonalne.

W drugim przypadku przy parametryzacji oszczędnej macierz planu jest postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznaczając przez $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$ kolejne kolumny macierzy planu mamy

$$\omega_1 = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{120}} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \omega_1^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{5}{21}} \\ -\frac{3\sqrt{\frac{3}{35}}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{\frac{3}{35}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{21}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{21}}}{2} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\omega_2 = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{120}} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \omega_2^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{5}{21}} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{21}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{21}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{21}}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{\frac{3}{35}}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{\frac{3}{35}}}{2} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \\ \sqrt{\frac{3}{35}} \end{bmatrix} \right\}.$$

Widać, że $\langle \omega_1^\perp, \omega_2^\perp \rangle = \frac{1}{15}$, więc w tym przypadku hipotezy ω_1 i ω_2 nie są ortogonalne