Równoliczność zbiorów

Def: $A\ rl\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \xleftrightarrow{1:1} B$ (istnieje bijekcja jednego zbioru <u>na</u> drugi)

Przykład. $\{a,b,c\}$ i $\{1,2\}$ – nie są równoliczne

Przykład. $A=N$ i $B=\{x \in N : x = 2k-1, k \in N\} = \{1,3,5,...\}$ – są równoliczne, bo istnieje bijekcja $f(k) = 2k-1$ zbioru A na zbiór B.

Def: Zbiór A jest **skończony** jeżeli jest równoliczny ze zbiorem $\{1,...,n\}$ dla pewnego $n \in N$.

Zbiór A jest **nieskończony** $\Leftrightarrow$ ~(A jest skończony)

Charakteryzacja zbiorów nieskończonych

Zbiór A jest **nieskończony** $\Leftrightarrow\ \exists\ B \subset A, B \neq A:\ A\ rl\ B$

(**czyli zbiór nieskończony jest równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym**).

Twierdzanie Cantora –Bernsteina

$\{A\ rl\ B_0 \subset B\ \wedge B\ rl\ A_0 \subset A\ \} \Rightarrow A\ rl\ B$

Def: Zbiór A jest **przeliczalny** $\Leftrightarrow$ $A\ rl\ N$ (inaczej elementy zbioru przeliczalnego można ponumerować liczbami naturalnymi)

Zbiór A jest **co najwyżej przeliczalny** $\Leftrightarrow$ A jest skończony lub przeliczalny

Zbiór A jest **nieprzeliczaln**y $\Leftrightarrow$ A jest nieskończony i ~($A\ rl\ N$)

Fakty: (metodą przekątniową można pokazać, że)

- Iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

  Zbiory A i B są przeliczalne więc $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$

$$A \times B = \begin{cases} (a_1,b_1)_1 & (a_1,b_2)_2 & (a_1,b_3)_4 & (a_1,b_4)_7 & \cdots \\ (a_2,b_1)_3 & (a_2,b_2)_5 & (a_2,b_3)_8 & (a_2,b_4)_{12} & \cdots \\ (a_3,b_4)_6 & (a_3,b_2)_9 & (a_3,b_3)_{13} & (a_3,b_4)_{18} & \cdots \\ (a_4,b_1)_{10} & (a_4,b_2)_{14} & (a_4,b_3)_{19} & (a_4,b_4)_{25} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{cases}$$

$f(i,j) = \dfrac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + i$ jest bijekcją $N \times N$ na N (znaleźć f^{-1} - ćwiczenia)

(Wskazówka: element(i,j) jest i-tym elementem na na (i+j-1)-szej przekątnej)

- Q jest przeliczalny, (jako wniosek, bo $Q \subset Z \times N$ (przel.) i $N \subset Q$

- Suma (mnogościowa) przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

  Dowód jak dla iloczynu kartezjańskiego

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14,\ldots}$
$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24,\ldots}$
$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34,\ldots}$
$A_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44,\ldots}$
$\vdots$

- R jest nieprzeliczalny (R *rl* (0,1) a (0,1) jest nieprzeliczalny- dowód nie wprost metodą przekątniową lub zasadą szufladkową Dirichleta)

  Funkcja $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}$ jest bijekcją zbioru R na przedział (0,1). Po przyjęciu umowy, że te rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych, które są skończone zastępujemy rozwinięciami nieskończonymi mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi z przedziału (0,1) a ciągami cyfr rozwinięcia dziesiętnego).
  Dla dowodu nie wprost załóżmy, ze wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału (0,1) można ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi)

  $a_1 = 0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}, \ldots$

  $a_2 = 0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}, \ldots$

  $a_3 = 0, a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}, \ldots$

  $\vdots$

  Rozważmy liczbę $c = 0, c_1c_2c_3 \cdots$ z przedziału (0,1) taką, że $c_i \neq a_{i,i}, c_i \neq 0$, $c_i \neq 9$. Liczba c różni się od każdej z liczb a_i i-tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego, więc nie występuje w tym ciągu -sprzeczność!

CIĄGI RZECZYWISTE

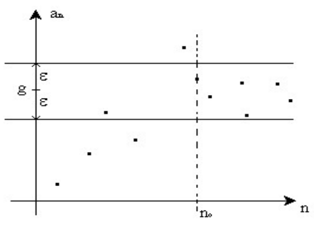
Ciągiem o wyrazach rzeczywistych nazywamy rzeczywistą funkcję $a : N \to R$ określoną na zbiorze liczb naturalnych

$1 \to a(1) = a_1$
$2 \to a(2) = a_2$
itd.

Oznaczenia: a_n - n-ty wyraz ciągu (a_n) - ciąg o wyrazie ogólnym a_n

Def. (granicy ciągu) **Ciąg** (a_n) jest **zbieżny do *g*** (co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$) gdy

$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in N} : \forall_{n\geq n_0} |a_n - g| \leq \varepsilon$.



Twierdzenie (o jednoznaczności granicy). Jeżeli ciąg a_n ma granicę, to tylko jedną.

Dowód (Nie wprost). Przypuśćmy, że ciąg ten ma dwie różne granice g_1 i g_2. Weźmy $\varepsilon = \frac{|g_1 - g_2|}{3}$. W przedziale $[g_2 - \varepsilon, g_2 + \varepsilon]$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Rightarrow$ w przedziale $[g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon]$ leży skończona ilość wyrazów ciągu, co przeczy temu, że g_1 jest granicą ciągu.

Def: **Ciąg rozbieżny**, to ciąg, który nie jest zbieżny.

Szczególnie ważne są dwa typy ciągów rozbieżnych

- rozbieżny do $+\infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall_M \exists_{n_0\in N} : \forall_{n\geq n_0} \quad a_n \geq M$
- rozbieżny do $-\infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_m \exists_{n_0\in N} : \forall_{n>n_0} \quad a_n \leq m$

Zbieżność, a ograniczoność

Tw: **Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony** (inaczej- warunkiem koniecznym zbieżności ciągu jest jego ograniczoność)

Dowód: Niech g – oznacza granicę a_n. Wybierając ε=1, z definicji granicy prawie wszystkie wyrazy (to znaczy wszystkie począwszy od n_0) ciągu leżą w przedziale [g-1, g+1]. Poza przedziałem może być jedynie skończona liczba wyrazów . Stąd

$\forall_n \ |a_n| \leq \max\{|a_1|,...,|a_{n_o-1}|,|g-1|,|g+1|\} = M$

Uwaga Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe

Np. $a_n = (-1)^n$ pokazuje, że ograniczoność nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności.

Niech (n_k) będzie **rosnącym ciągiem liczb naturalnych** a (a_n) dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych.

Ciąg (a_{n_k}) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n). Podciąg otrzymujemy wiec z ciągu pomijając niektóre jego wyrazy.

Tw. **Bolzano-Weierstrassa**. Z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód (szkic). Ciąg jest ograniczony, a więc wszystkie jego wyrazy leżą w pewnym przedziale domkniętym. Dzielimy ten przedział na dwa przedziały domknięte równej długości. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Z tego przedziału wybieramy jeden z wyrazów a dla wybranego przedziału domkniętego powtarzamy powyższe czynności wybierając wyraz ciągu o numerze wyższym niż wybrany w poprzednim kroku itd. Dostajemy ciąg przedziałów domkniętych i pewien podciąg. Częścią wspólną zstępującego ciągu przedziałów domkniętych jest dokładnie jeden punkt – granica wybranego podciągu.

Tw. Jeżeli ciąg ma granicę, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g \ .$$

Dow. W przedziale [g-ε, g+ε] leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) a więc także prawie wszystkie wyrazy podciągu (a_{n_k}).

Tw. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Dow. Rozważmy przypadek ciągu rosnącego (a_n), ograniczonego od góry (dla malejącego i ograniczonego od dołu – analogicznie).

Niech $\{a_1,a_2,...\}$ oznacza zbiór wyrazów ciągu (a_n) : jest to podzbiór R.

Z założenia $\{a_1,a_2,...\}$ jest ograniczony od góry $\Leftrightarrow \forall_{n\in N}\ a_n \le M$

Z zasady ciągłości zbioru R istnieje (dokładnie jedna liczba rzeczywista) $g = \sup\{a_1, a_2, ...\}$

Z definicji kresu $\forall_n\ a_n \le g$ i $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0} a_{n_0} \ge g-\varepsilon$, a z założenia monotoniczności

$\forall_{n\ge n_0}\ a_n \ge g-\varepsilon$

Podsumowując te fakty:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in N}\forall_{n>n_0}\quad g-\varepsilon \le a_n \le g$$
$$\Downarrow$$
$$g-\varepsilon \le a_n \le g+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|a_n - g| \le \varepsilon$$

co oznacza , że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Przykład 1. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left.\begin{array}{l}\forall_n\ a_n \le 3 \text{ - ograniczony od góry}\\ \forall_n\ a_{n+1} > a_n \text{ - } \uparrow\end{array}\right\} \Rightarrow \text{istnieje granica (powiedzmy } e\text{)}\quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Z „innych" obliczeń wiadomo, że $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}7182818...$.

- Ograniczoność ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{n}\right)^k = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{n}\right)^k = 2+\sum_{k=2}^{n}\tfrac{n!}{k!(n-k)!n^k} = 2+\sum_{k=2}^{n}\tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} =$$
$$2+\tfrac{(1-\frac{1}{n})}{2!}+\tfrac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\tfrac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}{n!} \le 2+\sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{k!} \le 2+\sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{2^{k-1}} \le 2+\sum_{k=2}^{\infty}\tfrac{1}{2^{k-1}} = 3$$

bo dla $k \ge 2,\ \ k! \ge 2^{k-1}$

- Monotoniczność ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$a_n = 2+\tfrac{(1-\frac{1}{n})}{2!}+\tfrac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\tfrac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}{n!}$$
$$a_{n+1} = 2+\tfrac{(1-\frac{1}{n+1})}{2!}+\tfrac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}{3!}+\cdots+\tfrac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})}{n!}+\tfrac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!}$$

Widać, że składniki wyrazu a_{n+1} są większe lub równe od odpowiadających im składników wyrazu a_n. Ponadto ciąg wyraz a_{n+1} zawiera dodatkowo dodatni składnik $\frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!}$.

Przykład 2 $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall_{n\in N} a_n \le 2 \text{ - ograniczony od góry}\\ \forall_n a_{n+1} > a_n \text{ - } \uparrow\end{array}\right\} \Rightarrow \text{jest zbieżny do } g = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Ze wzoru ogólnego $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Dokonując w tej równości przejścia granicznego ($a_{n+1} \to g$ i $a_n \to g$) otrzymujemy: $g = \sqrt{2+g}$. Stąd g=2.

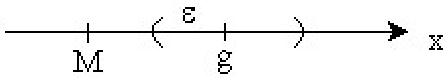
Nierówności w przejściach granicznych

Tw. O zachowaniu <u>słabej</u> nierówności

$$\forall_{n\geq n_0} a_n \leq M \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Rightarrow g \leq M$$

$$\forall_{n\geq n_0} a_n \geq m \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Rightarrow g \geq m$$

Dow. (a.a.)



Niech $g>M$. Weźmy $\varepsilon = \dfrac{g-M}{2}$ (połowa odległości między g i M. Z def. granicy prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w przedziale $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$ $\to$ sprzeczność!

UWAGA: Nierówności <u>ostre</u> nie zachowują się w przejściach granicznych!

Np. $\forall_{n\in N} \ \frac{1}{n} > 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Konsekwencją twierdzenia o zachowaniu <u>słabej</u> nierówności w przejściach granicznych jest następujące

Tw. (o trzech ciągach)

$$\left(\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = g \wedge \lim_{n\to\infty} c_n = g\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = g$$

Jako wniosek z powyższego uzyskujemy

Tw. $\forall_{n\geq n_0} |a_n| \leq M \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Arytmetyka granic

Tw. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ $(\forall_n \ b_n \neq 0$ i $b \neq 0)$

Dow. (punktu 3). $0 \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - a_n b_n + a_n b_n - a b_n}{b_n b}\right| \leq \frac{|a_n|}{|b_n||b|}|b_n - b| + \frac{1}{|b|}|a_n - a|$

Ciąg (a_n) (jako zbieżny) jest ograniczony powiedzmy przez M . Z faktu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ wynika, że

$\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |b| > 0$ a stąd $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ dla prawie wszystkich n . Wobec tego $\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}$ dla prawie wszystkich n.

Otrzymujemy wiec dla prawie wszystkich n nierówność $0 \le |\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = \le \frac{2M}{b^2}|b_n - b| + \frac{1}{|b|}|a_n - a|$ z której z twierdzenia o trzech ciągach i z punktu 1 otrzymujemy tezę.

Inne własności:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$ $\qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0$

b) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n\ge n_0} a_n > 0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty$ $\qquad \frac{1}{0^+} = \infty$

c) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n\ge n_0} a_n < 0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = -\infty$ $\qquad \frac{1}{0^-} = -\infty$

d) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$ $\qquad a > 0 \Rightarrow a\infty = \infty$

e) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$ $\qquad \frac{a}{\infty} = 0$

f) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$ $\qquad a < 0 \Rightarrow a\infty = -\infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty,\ \infty - \infty, 1^\infty, 0^0,\ \infty^0$.

Warunek Cauchy'ego. Mówimy , że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego , gdy

$$\text{(C)} \qquad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in N}\forall_{n,m\ge n_0}|a_m - a_n| \le \varepsilon .$$

Uwaga. Nie ma tu mowy o granicy

Def. Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego nazywamy ciągiem **fundamentalnym**

Tw. Dla ciągu liczb rzeczywistych prawdziwa jest równoważność:

(a_n) - zbieżny $\Leftrightarrow$ ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego

Dowód.($\Rightarrow$) Z założenia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ mamy $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in N} : \forall_{n\ge n_0} |a_n - g| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd dla $m, n \ge n_0$ mamy $|a_n - a_m| \le |a_n - g| + |a_m - g| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, czyli spełniony jest warunek (C).

($\Leftarrow$)(**Szkic**) ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego$\Rightarrow$ ciąg (a_n) jest ograniczony $\Rightarrow$ (tw. Bolzano-Weierstrassa) (a_{n_k})jest podciągiem zbieżnym do g. Stąd $|a_n - g| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g|$. Ale $|a_n - a_{n_k}| \le \frac{\varepsilon}{2}$ dla n , $n_k \ge n_0$ (z war. C) a $|a_{n_k} - g| \le \frac{\varepsilon}{2}$ bo $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. Wobec tego $|a_n - g| \le \varepsilon$ dla $n \ge n_0$.

Ważne granice ciągów

1) Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e \ ; \ \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \ ; \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0 \quad (p > 0, \alpha > 0)$

Ad 2. $\forall n \ge 2 \;\; \sqrt[n]{n} \ge 1$, stąd $\forall n \ge 2 \;\; \sqrt[n]{n} = 1+\varepsilon_n,\; \varepsilon_n \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\forall n \ge 2 \quad n = (1+\varepsilon_n)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon_n^k \ge \binom{n}{2}\varepsilon_n^2 \Rightarrow \forall n \ge 2 \;\; n \ge \tfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2 \Rightarrow \forall n \ge 2 \;\; 0 \le \varepsilon_n \le \sqrt{\tfrac{2}{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$$

Ad 3 Podobnie jak (2)

Ad 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon\; \exists n_0\; \forall n > n_0 \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - g\right| \le \varepsilon \;\Rightarrow\;$ Stąd np. dla $\varepsilon = \frac{1-g}{2}$

$$\exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le g+\varepsilon = g_1 < 1 \Rightarrow \begin{array}{l} |a_{n_0+1}| \le g_1|a_{n_0}|, \\ |a_{n_0+2}| \le g_1|a_{n_0+1}| \le g_1^2|a_{n_0}|, \\ \vdots \\ |a_{n_0+k}| \le g_1^k|a_{n_0}| \end{array}$$

Otrzymaliśmy więc oszacowanie $\forall k \quad 0 \le |a_{n_0+k}| \le g_1^k|a_{n_0}|$. Stąd z tw. o trzech ciągach $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_0+k}| = 0$.

Ad 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon\; \exists n_0\; \forall n > n_0 \left|\sqrt[n]{|a_n|} - g\right| \le \varepsilon \;\Rightarrow\;$ Stąd np. dla $\varepsilon = \frac{1-g}{2}$

$\exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\sqrt[n]{|a_n|} \le g+\varepsilon = g_1 < 1 \Rightarrow \exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\; |a_n| \le g_1^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ad 6. Wystarczy skorzystać z (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)^\alpha}{(1+p)^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+p} < 1$