

CAŁKA NIEOZNACZONA

$f: R \supset I \rightarrow R$, gdzie I – przedział (zbiór spójny)

Def. Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy funkcję F taką, że $\forall_{x \in I} F'(x) = f(x)$.

Warunkiem koniecznym istnienia dla funkcji f funkcji pierwotnej jest posiadanie przez f własności Darboux (więc f nie może mieć nieciągłości I-go rodzaju).
(Uwaga: na ćwiczeniach pokazać, że pochodna funkcji różniczkowalnej na przedziale ma własność Darboux.)

Warunkiem wystarczającym istnienia dla funkcji f funkcji pierwotnej jest ciągłość funkcji f .

Łatwo pokazać, że

- jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to $F+c$ również jest funkcją pierwotną funkcji f
- dwie funkcje pierwotne F_1 i F_2 funkcji f mogą się różnić jedynie o stałą c .

Def. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na przedziale I nazywamy całką nieoznaczoną funkcji f na tym przedziale i oznaczamy $\int f(x)dx$.

Uwaga: funkcje e^{x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$ nie posiadają funkcji pierwotnych w klasie funkcji elementarnych.

Wzory postawowe: (w przedziałach, w których f i F są określone)

$$\int 0 dx = c = \text{const} \qquad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Prawdziwe są także następujące wzory

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Uwaga. Pochodna całki (czyli zbioru funkcji pierwotnych), to zbiór pochodnych poszczególnych funkcji pierwotnych- wszystkie te pochodne są równe f więc dla prostoty piszemy f
Suma całek jest rozumiana jako algebraiczna suma zbiorów.

Metody całkowania

I. Przez części: (bezpośrednio z wzoru na różniczkowanie iloczynu)

Tw. Jeżeli funkcje f i g mają ciągle pochodne w I , to $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Przykład $\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array} \right| = xe^x - e^x + c$

Wzory rekurencyjne (wyprowadzane z całkowania przez części):

$$(R) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \quad n \geq 2$$

$$(S) \quad \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$(C) \quad \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

Dow. (R) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^n} dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \frac{x}{2} & f'(x) = \frac{1}{2} \\ g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^n} & g(x) = \frac{1}{-n+1} (1+x^2)^{-n+1} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{x}{2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{1-n} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

II. Przez podstawienie (ze wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej)

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Tw: (o całkowaniu przez podstawienie $x = \varphi(t)$)

Jeżeli:

- 1° $\varphi: T \rightarrow X$ jest różniczkowalnym i wzajemnie jednoznacznym (bijektywnym) przekształceniem przedziału T na przedział X ,
- 2° funkcja $f: X \rightarrow R$ ma funkcję pierwotną na przedziale X ,

to: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, gdzie $t = \varphi^{-1}(x)$

Dowód. Funkcja $F(\varphi(t))$ będąca złożeniem funkcji różniczkowalnych jest różniczkowalna na T i prawdziwy jest wzór $[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, skąd mamy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c \text{ na przedziale } T. \text{ Z założenia 2 mamy } \int f(x)dx = F(x) + c \text{ na}$$

przedziale X . Z założonej wzajemnej jednoznaczności φ , istnieje funkcja odwrotna $\varphi^{-1}: X \rightarrow T$.

Po podstawieniu $t = \varphi^{-1}(x)$ do $F(\varphi(t))$ otrzymujemy $F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = F(x)$, więc

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad \text{przy czym } t = \varphi^{-1}(x).$$

Tw. (o całkowaniu przez podstawienie $y = h(x)$)

Jeżeli:

- 1° $h: X \rightarrow Y$ jest różniczkowalnym odwzorowaniem przedziału X na Y ,
- 2° funkcja $g: Y \rightarrow R$ ma funkcję pierwotną G na Y ,

to: $\int g(h(x))h'(x)dx = \int g(y)dy$, gdzie $y = h(x)$

Dowód. Podobnie jak poprzednio wystarczy zauważyć, że funkcja $G(h(x))$ jest funkcją pierwotną funkcji $g(h(x))h'(x)$ na przedziale X , więc $\int g(h(x))h'(x)dx = G(h(x))+c = \int g(y)dy$, gdzie $y=h(x)$.

Oba wyprowadzone wzory na całkowanie przez podstawienie, z pozoru identyczne, są jednak istotnie różne. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że rozważanym zagadnieniem jest wyznaczenie całki funkcji określonej na przedziale X , to w pierwszym przypadku wymagana jest odwracalność funkcji definiującej podstawienie (zwane wstecznym) a w drugim nie. Drugie podstawienie (w przód) wymaga natomiast specjalnej postaci funkcji podcałkowej.

Przykład

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x \\ dx = \cos t dt \end{array} \right|_{\substack{x \in (-1;1) \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}} = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= \int \cos^2 t dt \stackrel{(\text{wzór C})}{=} \left. \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c \right|_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + c$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcja wymierna to funkcja $f(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie licznik i mianownik to wielomiany względnie pierwsze. Jeżeli stopień wielomianu L jest mniejszy od stopnia wielomianu M ($st(L) < st(M)$), to funkcję wymierną $\frac{L(x)}{M(x)}$ nazywamy **funkcją wymierną właściwą**.

Jeżeli $st(L) \geq st(M)$, to wykonując dzielenie wielomianów otrzymujemy następujące przedstawienie $\frac{L(x)}{M(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{M(x)}$ i $st(R) < st(M)$. Aby scałkować dowolną funkcję wymierną wystarczy pokazać jak całkować funkcję wymierną właściwą

Wiadomo z algebry, że funkcję wymierną właściwą można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju.

- $\frac{A}{(x-a)^k}$ - ułamek prosty I-go rodzaju
- $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, $\Delta = p^2 - 4q < 0$ - ułamek prosty II-go rodzaju

$$\frac{L(x)}{(x-a)^k (x^2+px+q)^n \dots} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \frac{B_1x+C_2}{x^2+px+q} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

Przykład Rozłożyć na ułamki proste funkcję $\frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)}$.

Z uwagi na postać mianownika rozkład jest następujący

$$\frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2},$$

skąd po przemnożeniu obu stron przez $(x-1)^2(x^2+2)$ otrzymujemy tożsamość (równość dla każdego x)
 $5x^2-11x = A(x-1)(x^2+2) + B(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)^2$,

stąd po uporządkowaniu otrzymujemy równoważną tożsamość
 $5x^2-11x = (A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(2A+C-2D)x+(-2A+2B+D).$

Porównanie odpowiednich współczynników prowadzi do układu

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=5 \\ 2A+C-2D=-11 \\ -2A+2B+D=0 \end{cases}, \text{ którego rozwiązaniem jest } A=1, B=-2, C=-1, D=6.$$

Stałe A, B, C i D można szybciej wyznaczyć wstawiając do tożsamości

$$5x^2-11x=A(x-1)(x^2+2)+B(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2$$

miejsce zerowe dwumianu $x-1$ tzn. $x=1$ uzyskując proste równanie $-6=3B$, skąd natychmiast dostajemy $B=-2$. Wstawiając do powyższej równości $B=-2$ i grupując po lewej stronie wyrazy nie zawierające nieznaną stałych otrzymujemy

$$7x^2-11x+4=A(x-1)(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Widać, że wielomian po prawej stronie jest podzielny przez dwumian $(x-1)$. Wobec tego wielomian po lewej stronie również musi być podzielny przez ten dwumian, co oznacza że $x=1$ musi być pierwiastkiem tego wielomianu. Jest to pewna forma kontroli poprawności dotychczasowych obliczeń. Po wykonaniu dzielenia obu stron przez $(x-1)$ otrzymujemy równość

$$7x-4=A(x^2+2)+(Cx+D)(x-1),$$

z której po podstawieniu $x=1$ otrzymujemy $3=3A$, więc $A=1$. Wstawiając uzyskaną stałą do powyższej równości, po zgrupowaniu wyrazów nie zawierających nieznaną stałych po lewej stronie otrzymujemy

$$-x^2+7x-6=(Cx+D)(x-1).$$

Znowu widać, że skoro wielomian po prawej stronie jest podzielny przez $(x-1)$, to wielomian po lewej stronie również musi być podzielny przez $(x-1)$ (łatwo sprawdzić, że $x=1$ jest pierwiastkiem wielomianu po lewej stronie). Wykonując dzielenie obu stron przez $(x-1)$ otrzymujemy

$$-x+6=Cx+D, \text{ skąd } C=-1 \text{ i } D=6.$$

Widać, że wykonując opisane operacje można wyznaczyć stałe $A_1, \dots, A_k$ związane z czynnikiem $(x-a)^k$.

Stałe $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$ związane z czynnikiem $(x^2+px+q)^n$ mogą być wyznaczone w ten sam sposób poprzez podstawienie do równości wielomianowej zespolonego pierwiastka równania $x^2+px+q=0$ i zastąpienie dzielenia wielomianów przez dwumian $x-a$ dzieleniem przez trójmian x^2+px+q .

Innym sposobem wyznaczania nieznaną współczynników jest wykorzystanie faktu, że równość wielomianów pociąga za sobą równość ich pochodnych (które są wielomianami stopnia o 1 niższego niż wyjściowe wielomiany. Wracając do rozważanego wcześniej przykładu

$$5x^2-11x=A(x-1)(x^2+2)+B(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2$$

wstawiając $x=1$ otrzymujemy $B=-2$. Różniczkując obustronnie powyższą tożsamość otrzymujemy

$$10x-11=A(x^2+2)+2Ax(x-1)+2Bx+C(x-1)^2+2Cx(x-1).$$

Obliczając wartości lewej i prawej strony dla $x=1$ otrzymujemy $-1=3A-4$ więc, tak jak poprzednio, $A=1$.

Biorąc pod uwagę możliwość przedstawienia funkcji wymiernej właściwej w postaci sumy ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju możemy sprowadzić całkowanie funkcji wymiernej do całkowania wielomianu i całkowania ułamków prostych.

Całkowanie ułamków prostych

$$\text{I-rodzaju } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \left| \frac{t=x-a}{dt=dx} \right| = \int \frac{A}{t^k} dt = A \int t^{-k} dt = \begin{cases} A \ln|x-a| + c & \text{dla } k=1 \\ \frac{A}{1-k} (x-a)^{1-k} + c & \text{dla } k \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{II-rodzaju } \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \\ = \frac{B}{2} I_1 + (C - \frac{Bp}{2}) I_2,$$

$$I_1 = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = \begin{cases} \left| \frac{t=x^2+px+q}{dt=(2x+p)dx} \right| = \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \ln(x^2+px+q) + c, & \text{dla } n=1 \\ \frac{1}{1-n} (x^2+px+q)^{1-n} + c, & \text{dla } n>1 \end{cases} \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) \right)^n} = \begin{cases} \left| \frac{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} dt} \right| = \left(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \right)^{2n-1} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór rekurencyjny (R)

Całkowanie funkcji wymiernych względem sinusa i cosinusa

$\int R(\sin x, \cos x) dx$, gdzie $R(u, v)$ jest funkcją wymierną zmiennych u i v

Całkę powyższej postaci można sprowadzić do całki funkcji wymiernej za pomocą tzw. **podstawienia uniwersalnego**

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi), \quad \begin{cases} x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{cases} \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Stąd
$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ostatnia całka jest całką z funkcji wymiernej (złożenie funkcji wymiernych jest funkcją wymierną)

Przykład.
$$\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x} = \int \frac{dx}{3 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{3}{2}t - 1} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t + \frac{1}{2}} - \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t - 2} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{t + \frac{1}{2}}{t - 2} \right| + c =$$

$$= \left\{ \text{gdzie } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + c.$$

W pewnych szczególnych przypadkach obliczenia można uprościć stosując inne podstawienie:

1° $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad t = \cos x$

2° $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad t = \sin x$

3° $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \quad t = \operatorname{tg} x$

Przykład.
$$\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x dx}{1 + \cos^2 x} \left\{ \begin{array}{l} \Re(u, v) = \frac{u^3}{1+v^2} \\ t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt = \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$t - 2 \operatorname{arctg} t + c = \left\{ \text{gdzie } t = \cos x \right\} = \cos x - 2 \operatorname{arctg} \cos x + c.$$

Obliczając tą całkę podstawieniem uniwersalnym otrzymujemy po nieco dłuższych rachunkach

otrzymujemy

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \left\{ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\} = \int \frac{8t^3}{(t^2 + 1)^2 (t^4 + 1)} dt = \left\{ u = t^2 \right\} = \int \frac{4u}{(u+1)^2 (u^2 + 1)} du = \int \frac{-2}{(u+1)^2} + \frac{2}{(u^2 + 1)} du =$$

$$= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) + c.$$

Wynik ten pozornie różni się od poprzedniego. Poprzez różniczkowanie można wykazać, że na dowolnym przedziale określoności obu funkcji, ich pochodne są identyczne. Ponadto, punkty osobliwe (punkty w których $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ jest nieokreślony) pojawiające się w ostatniej całce, są osobliwościami usuwalnymi, tzn. istnieją granice funkcji w tych punktach, więc można funkcję w naturalny sposób przedłużyć przyjmując wartości równe odpowiednim granicom.

Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych

Całki postaci $\int \Re(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$, gdzie $\Re(u, v)$ jest funkcją wymierną argumentów u , v i $ad-bc \neq 0$

sprowadzamy do całki funkcji wymiernej przez podstawienie

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \text{ z którego wyznaczamy } x = \frac{t^n d - b}{-t^n c + a}, dx = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(-t^n c + a)^2} dt.$$

Wobec tego $\int \Re(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int \Re(\frac{t^n d - b}{-t^n c + a}, t) \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(-t^n c + a)^2} dt$. Ostatnia całka jest całką funkcji wymiernej.

Przykład. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1} \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[12]{2x-1})^4 (\sqrt[12]{2x-1})^3} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[12]{2x-1} \\ x = \frac{t^{12}+1}{2}, dx = 6t^{11} dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^8}{t-1} dt =$

$$= 6 \int (t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}) dt = 6(\frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \dots + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|) + c, \text{ gdzie } t = \sqrt[12]{2x-1}.$$

Całki postaci $\int \Re(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, gdzie $\Re(u, v)$ jest funkcją wymierną argumentów u i v , sprowadzamy do całki funkcji wymiernej przez jedno z niewykluczających się wzajemnie **podstawień Eulera**:

1. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} x$, gdy $a > 0$,
2. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}$, gdy $c > 0$,
3. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, gdy $\Delta > 0$.

Przykład. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+4} = t - x, \quad x = \frac{t^2-4}{2(t+1)} \\ dx = \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2} dt, \quad \sqrt{x^2+2x+4} = t - \frac{t^2-4}{2(t+1)} = \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{t^2-4}{2(t+1)} + 2}{\frac{t^2+2t+4}{2(t+1)}} \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2} dt =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t^2+4t}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int dt + \int \frac{dt}{t+1} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{2} t + \ln|t+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{t+1} + c \quad \{\text{gdzie } t = x + \sqrt{x^2+2x+4}\} =$$

$$= \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2+2x+4}) + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}| + \frac{3}{2} \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+4}} + c =$$

$$= \sqrt{x^2+2x+4} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}| + c$$

Ten sam przykład $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+4} = xt - 2, \quad x = \frac{4t+2}{t^2-1} \\ dx = \frac{-4(t^2+t+1)}{(t^2-1)^2} dt, \quad \sqrt{x^2+2x+4} = \frac{2(t^2+t+1)}{t^2-1} \end{array} \right\} =$

$$= -4 \int \frac{t^2+2t}{(t^2-1)^2} dt = \int (\frac{-1}{t-1} + \frac{-3}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}) dt =$$

$$= \ln|\frac{t+1}{t-1}| + \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t+1} + c \quad \{\text{gdzie } t = \frac{\sqrt{x^2+2x+4}+2}{x}\}$$