

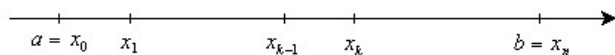
CAŁKA (OZNACZONA) RIEMANNA

Oznaczenia: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja rzeczywista określona na przedziale domkniętym

Weźmy ciąg $a = x_0 < x_1 < \dots < b = x_n$

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów.

$d(P) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ - średnica przedziału



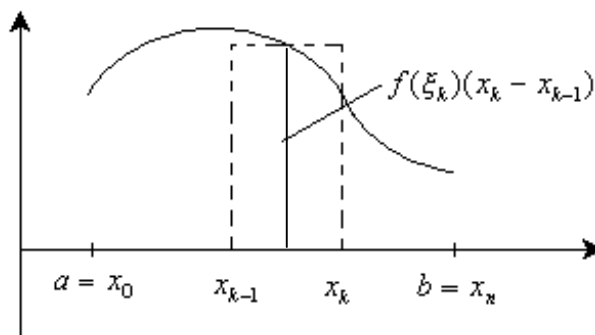
Wybieramy w każdym podprzedziale punkt pośredni $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$; $k = 1, 2, \dots, n$

Określony jest więc ciąg $\{\xi_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ - ciąg punktów pośrednich

Tworzymy sumę

$$\sigma(f, P, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Interpretacja σ dla nieujemnej funkcji f



Def. Liczbę rzeczywistą I nazywamy całką Riemanna (całką oznaczoną) funkcji f na przedziale $[a, b]$

jeżeli $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \forall \{\xi_k\}_{k=1,2,\dots,n} d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, P, \{\xi_k\}) - I| < \varepsilon$.

Funkcję f dla której istnieje całka Riemanna na przedziale $[a, b]$ nazywamy całkowaną w sensie Riemanna.

Oznaczenia:

$I = \int_a^b f(x) dx$, gdzie a - dolna granica, b - górna granica, f - funkcja podcałkowa

$\mathcal{M}[a, b]$ - zbiór funkcji całkownych w sensie Riemanna na $[a, b]$

Powyższy warunek definicyjny przypomina ε - δ definicję granicy w sensie Cauchy'ego, którą mniej

formalnie zapisujemy $I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Ponieważ definicji granicy w

sensie Cauchy’ego odpowiada równoważna ciągowa definicja w sensie Heinego możemy podać równoważną ciągową definicję całki.

Widać, że $d(P_n) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa (kontrprzykład)

Def. Ciąg przedziałów nazywamy normalnym jeżeli $n \rightarrow \infty \Rightarrow d(P_n) \rightarrow 0$.

Def. (według Heine’go) Liczbę $I \in R$ nazywamy całką Riemanna (oznaczoną) funkcji f na przedziale $[a, b]$ jeżeli dla każdego normalnego ciągu przedziałów odpowiadający ciąg sum całkowych $\sigma_n(f, P_n, \{\xi_k^n\})$ jest zbieżny do liczby I niezależnie od wyboru punktów pośrednich $\{\xi_k^n\}$.

Przykład funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna:

Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R \setminus Q \end{cases}$ nie jest całkowalna na $[0, 1]$.

Uwaga. Obliczanie całek z definicji jest zadaniem trudnym. Nie wiemy nawet kiedy całka istnieje.

Potrzebujemy więc pewnych warunków koniecznych i wystarczających na istnienie całki.

Szczególnie kłopotliwy jest warunek niezależności granicy od wyboru punktów pośrednich..

Wprowadzimy więc pewne skrajne sumy szacujące od dołu i od góry sumy pośrednie

Sumy Darboux – całka górna i dolna

$f: [a, b] \rightarrow R$, f – ograniczona,

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów.

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) ; M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) ; m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) ; M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

Z uwagi na ograniczoność f powyższe kresy są skończone.

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) - \text{dolna suma Darboux}$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \text{górna suma Darboux}$$

$\forall P \quad m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$ - obie sumy Darboux są ograniczone .

Ponieważ przy zagęszczaniu podziału suma dolna nie może maleć a suma górna nie może rosnąć

można pokazać, że dla dowolnych podziałów P_1 i P_2 $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$. Rzeczywiście Biorąc

podział $P_3 = P_1 \cup P_2$ będący zagęszczeniem obu podziałów mamy

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_3) \leq S(f, P_3) \leq S(f, P_2)$$

czyli istnieją kresy:

$$\underline{I} = \sup_P s(f, P) - \text{dolna całka Darboux}$$

$$\bar{I} = \inf_P S(f, P) - \text{górna całka Darboux}$$

Dla funkcji ograniczonej obie całki zawsze istnieją.

Z powyższych rozważań wynika, że :

Tw. Warunkiem koniecznym całkowalności w sensie Riemanna funkcji f jest jej ograniczoność

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \text{ - ogr. na } [a, b].$$

Rzeczywiście dla danego podziału P $m(b-a) \leq s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$

$$s(f, P) = \inf_{\{\xi_k\}} \sigma(f, P, \{\xi_k\}) \quad S(f, P) = \sup_{\{\xi_k\}} \sigma(f, P, \{\xi_k\})$$

Ponieważ przez odpowiedni wybór punktów pośrednich można sumę $\sigma(f, P, \{\xi_k\})$ uczynić dowolnie bliską sumy dolnej $s(f, P)$ lub górnej $S(f, P)$, które są skończone jedynie wówczas, gdy funkcja jest ograniczona na przedziale $[a, b]$. Ponadto

Tw. Warunkiem koniecznym i wystarczającym całkowalności funkcji f w sensie Riemanna jest z równość całek górnej i dolnej.

Inaczej $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists P : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$

Tw. Funkcja f **ciągła** na $[a, b]$ **jest R-całkowalna** na $[a, b]$.

Dow. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest jednostajnie ciągła, więc $\forall \varepsilon \exists \delta$
 $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Stąd, dla dowolnego podziału P o średnicy mniejszej

$$\text{niż } \delta \text{ otrzymujemy } S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Podobnie można udowodnić

Tw. Funkcja **monotoniczna** na $[a, b]$ **jest R-całkowalna** na $[a, b]$.

Dow. (dla funkcji niemalejącej) Rozważmy podział równomierny $P = \{x_i = a + \frac{b-a}{n} i, i = 0, \dots, n\}$
 Wówczas $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1}), i = 1, \dots, n$. Wobec tego

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = (b-a) \frac{f(b) - f(a)}{n} < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych n .

Tw. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (więc $m \leq f \leq M$), $g: [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła $\Rightarrow g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dowód Rudin str 109.

Charakteryzacja funkcji całkowalnej w sensie Riemanna

Def. Rodzinę przedziałów $\{(a_k, b_k)\}_{k=1,2,\dots}$ nazywamy pokryciem zbioru $A \Leftrightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$.

Def. Długością pokrycia nazywamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (b_n - a_n)$ (o ile istnieje!).

Def. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest miary (L) zero, jeżeli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje pokrycie tego zbioru o długości nie przekraczającej ε .

Przykład. Dowolny zbiór przeliczalny $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ ma miarę (L) równą 0. Pokryciem jest rodzina

przedziałów $(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})$, $i=1,2,\dots$ o długości $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon$

Tw. Funkcja f ograniczona na $[a,b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna (tzn. $f \in \mathcal{R}[a,b]$) $\Leftrightarrow$ zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miarę zero.

Przykład. Funkcja Riemanna $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{dla } x = \frac{p}{q} \in [0,1]; p, q \in \mathbb{N} \text{ względnie pierwsze} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$ mająca punkty nieciągłości w punktach wymiernych przedziału $(0,1]$ jest całkowalna w sensie Riemanna.

Własności funkcji R-całkowalnych

Tw. Niech $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\text{a) } f+g \in \mathcal{R}[a,b] \text{ i } \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{b) } \alpha f \in \mathcal{R}[a,b] \text{ i } \int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{c) } f \leq g \text{ na } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{d) } a < c < b \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a,c] \text{ i } f \in \mathcal{R}[c,b] \text{ oraz } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx)$$

$$\text{e) } fg \in \mathcal{R}[a,b]$$

$$\text{f) } |f| \in \mathcal{R}[a,b] \text{ i } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Punkty a-d są prostymi konsekwencjami definicji całki i własności granic. Ponadto jeżeli $f \in \mathcal{R}[a,b]$, to $m \leq f(x) \leq M$ na przedziale $[a,b]$ a z punktu (c) otrzymujemy

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ad e) $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$ (bo $g(t)=t^2$ jest funkcją ciągłą a f całkowalną) a $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$

Ad f) $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$ (bo $g(t)=|t|$ jest funkcją ciągłą a f całkowalną). Ponadto $-|f| \leq f \leq |f|$,

więc z c i b $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, co jest równoważne $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Rozszerzenie znaczenia symbolu całki Riemanna

Z definicji całki Riemanna widać, że istotną rolę odgrywa uporządkowanie prostej R (przy tworzeniu podziału $\mathbb{P}$). Jeżeli zmienimy uporządkowanie prostej, to sumy całkowite zmieniają znak, bo zmieniają znak różnice $x_k - x_{k-1}$. Przyjmijemy więc dla $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx \stackrel{df}{=} - \int_a^b f(x) dx.$$

Stąd w szczególności $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Całkowanie a różniczkowanie

Tw. Niech $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i niech $a \leq x \leq b$. Wówczas

a) funkcja $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest ciągła na $[a, b]$.

b) jeśli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to F jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dow. a) Niech $x \in [a, b]$. Wybieramy dowolne h takie, że $x+h \in [a, b]$

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \quad (*)$$

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \text{ jest ograniczona na } [a, b] \Leftrightarrow \exists_M \forall_{t \in [a, b]} |f(t)| \leq M \quad (**)$$

$$Z (*) \text{ i } (**) \quad |F(x+h) - F(x)| \leq \int_{\min\{x, x+h\}}^{\max\{x, x+h\}} |f(t)| dt \leq M |h| \Rightarrow \text{ciągłość}$$

Dow. b) Niech $x_0 \in [a, b]$ - punkt ciągłości funkcji f . Wybieramy dowolne h takie, że $x_0+h \in [a, b]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \right| \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \left| \frac{1}{h} \right| \int_{\min\{x_0, x_0+h\}}^{\max\{x_0, x_0+h\}} |f(t) - f(x_0)| dt \end{aligned}$$

f jest ciągła w punkcie $x_0 \Rightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{t \in [a, b]} |t - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Stąd

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon, \text{ co implikuje}$$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Wniosek. Jeżeli $f \in C[a, b]$, to $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na $[a, b]$ i $F(a) = 0$.

Tw. (Newtona-Leibniza) Jeżeli $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i istnieje funkcja F różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$\forall_{x \in [a, b]} F'(x) = f(x), \text{ to } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dow. Dla podziału $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ wybieramy punkty pośrednie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tak, aby $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ (z tw. Lagrange'a dla F wynika, że jest to możliwe). Wówczas

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a)$$

(wszystkie wyrazy sumy z wyjątkiem $F(a)$ i $F(b)$ ulegną redukcji).

Wobec założonej całkowalności f , jeżeli $dP \rightarrow 0$, to $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$.

Stąd $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Tw. (całkowe o wartości średniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, $\Rightarrow \exists c \in (a, b): \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

Dow. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ jest funkcją pierwotną funkcji f na $[a, b]$. Wobec tego $F(x)$ - różniczkowalna na $[a, b]$, czyli również ciągła na $[a, b]$, czyli F spełnia zał. tw. Lagrange'a, więc $\exists c \in (a, b): F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$.

Jeżeli $f \in \mathcal{R}[a, b]$ to liczbę $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$ nazywamy wartością średnią funkcji f na przedziale $[a, b]$.
Jeżeli f jest ciągła, to $\exists c \in (a, b) : \mu = f(c)$

Tw. (o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej)

Jeżeli

- f i g są różniczkowalne na $[a, b]$,
- $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$

to $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \{f(b)g(b) - f(a)g(a)\} - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Dowód. Łatwo zauważyć, że funkcje fg' i $f'g \in \mathcal{R}[a, b]$. Ze wzoru $(fg)' = fg' + f'g$ i tw. Newtona –

Leibniza mamy $\int_a^b (f'g + fg')dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$, stąd teza.

Tw. (o całkowaniu przez podstawienie całki oznaczonej)

a) $\left. \begin{array}{l} \varphi \in C^1_{[\alpha, \beta]} \\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \\ f \text{ jest cg. na } \{x : x = \varphi(t) \ t \in [\alpha, \beta]\} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

b) $\left. \begin{array}{l} h \in C^1_{[a, b]} \\ h(a) = A, h(b) = B \\ g \text{ jest cg. na } \{y : y = h(x) \ x \in [a, b]\} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b g(h(x))h'(x)dx = \int_A^B g(y)dy$

Dow. (a). Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na $\{x : x = \varphi(t) \ t \in [\alpha, \beta]\}$. Wówczas $F(\varphi(t))$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$. (z tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej). Stąd

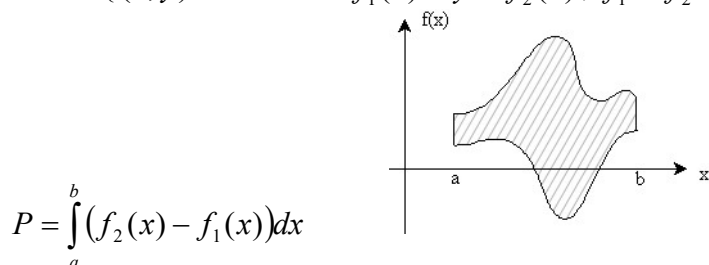
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Zastosowanie całki Riemanna

Zastosowania geometryczne całek

I. Pole trapezu krzywoliniowego

$\{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), f_1 \leq f_2 \text{ na } [a, b], f_1, f_2 - \text{ciągłe na } [a, b]\}$



II. Długość łuku krzywej

Niech $\vec{r} : t \in [\alpha, \beta] \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in R^3$ będzie funkcją wektorową określoną na $[\alpha, \beta]$.

W daną krzywą wpisujemy łamaną i bierzemy kres górny długości łamanych. Jeżeli będzie on skończony, to krzywą nazywamy **prostowalną**.

Tw. Jeżeli $\vec{r} \in C^1_{[\alpha, \beta]}$ to krzywa $K : \{\vec{r}(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ jest prostowalna (ma długość) i

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

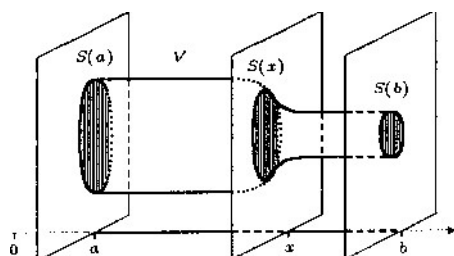
Szkic dowodu.

$$\begin{aligned} \text{Długość łamanej} &= \sum_{k=1}^n |\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} = \\ &= \{3 \text{ razy tw. Lagrange'a}\} = \sum_{k=1}^n \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2 + [z'(\psi_k)]^2} (t_k - t_{k-1}) = \{\text{przejście graniczne}\} \Rightarrow \\ &\text{teza.} \end{aligned}$$

Przypadek szczególny : Jeżeli $K = \{(x, f(x)) : x \in [a, b], f \in C^1_{[a, b]}\}$, to $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

III. Objętość bryły

Niech $S(x)$, $a \leq x \leq b$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie x i niech funkcja $S(x)$ będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$.



Wtedy $V = \int_a^b S(x) dx$

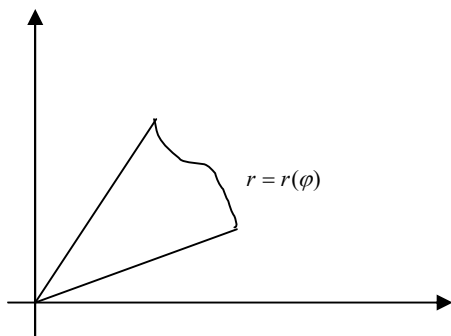
W szczególności dla bryły obrotowej: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

IV. Pole powierzchni bryły obrotowej

Pole powierzchni bryły obrotowej aproksymujemy sumą pól powierzchni stożków ściętych zakreślonych przez łamaną wpisaną w daną krzywą.

$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

V. Pole obszaru zadanego w układzie biegunowym $r \leq r(\varphi); \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.



Dzieląc przedział $[\varphi_1, \varphi_2]$ na n równych części i przybliżając pola otrzymanych kawałków polami wycinków

kołowych uzyskujemy wzór $P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi$.

Długość krzywej danej równaniem biegunowym $r = r(\varphi); \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ wyliczymy przedstawiając tą krzywą w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos t \\ y(t) = r(t) \sin t \end{cases}; t \in [\varphi_1, \varphi_2]. \text{ Stąd wyliczymy } \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{[r'(t)]^2 + [r(t)]^2}.$$

$$\text{Wobec tego } l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r'(t)]^2 + [r(t)]^2} dt$$

Zastosowania fizyczne całek

VI. Droga przebyta w ruchu zmiennym

Niech punkt materialny porusza się po płaszczyźnie lub w przestrzeni ze zmienną prędkością

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)). \text{ Oznaczmy } v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}.$$

Droga przebyta przez punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \text{ a przemieszczenie } \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt, \int_{t_1}^{t_2} v_y(t) dt, \int_{t_1}^{t_2} v_z(t) dt \right]$$

VII. Praca wykonana przez zmienną siłę działającą wzdłuż prostej

Założmy, że równoległe do osi OX działa zmienna siła $F(x) = |\vec{F}(x)|$.

Praca wykonana przez tę siłę od punktu $x=a$ do punktu $x=b$ wyraża się wzorem

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

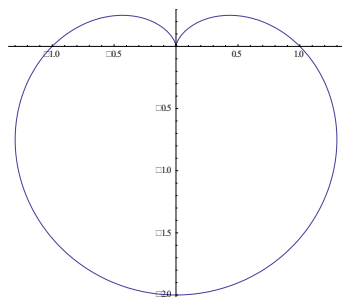
VIII. Masa odcinka materialnego

Założmy że odcinek $[a, b]$ obdarzony jest masą o gęstości liniowej $\rho(x)$. Wówczas jego masa wyraża

$$\text{się wzorem } m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Przykłady

- Oblicz pole powierzchni i obwód figury ograniczonej krzywąadaną biegunowo $r(\varphi) = 1 - \sin \varphi$. Narysuj tą krzywą w układzie współrzędnych x, y .



$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \sin \varphi)} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2})} d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2})^2} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2}| d\varphi = \left\{ t = \frac{\varphi}{2} \right\} = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} |\sin t - \cos t| dt = 2\sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin t - \cos t) dt \right] = \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2} [(\sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\sin t + \cos t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}] = 2\sqrt{2} [(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1)] = 8$$

- Całkę Riemanna można wykorzystać do obliczania pewnych granic dostrzegając w pewnych wyrażeniach sumy całkowite. Aby obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2}$, przekształcimy ją najpierw do postaci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right] \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2} \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} \text{ (całka przedstawia pole I ćwiartki koła } x^2 + y^2 \leq 1 \text{)}.$$

- Obliczyć długość krzywej zadanej równaniem biegunowym $r(\varphi) = \varphi^4$, $\varphi \in [0, 3]$.

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} d\varphi \text{ W rozważanym przypadku}$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{[4t^3]^2 + [t^4]^2} dt = \int_0^3 t^3 \sqrt{16 + t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 16 + t^2 \\ du = 2t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_{16}^{25} (u - 16) \sqrt{u} du =$$

$$\frac{1}{2} \int_{16}^{25} (u^{\frac{3}{2}} - 16u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{1423}{15} \approx 94.9$$