

Całki niewłaściwe

Definiując całkę Riemanna $\int_a^b f(x)dx$ przyjmowaliśmy dwa fundamentalne założenia

- przedział $[a, b]$ jest ograniczony
- funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona

Naruszenie któregoś z tych założeń powoduje, że nie możemy zdefiniować całki Riemanna.

W tej sytuacji zdefiniujemy tzw. **całki niewłaściwe**

I. Całki o granicach nieskończonych

Założmy

- $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- $\forall_{A \geq a} f \in R[a, A]$ (stąd wynika , że f jest ograniczona na $[a, A]$)

Def. Całką funkcji f w granicach $[a, \infty)$ nazywamy granicę (skończoną lub nie) $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$. Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że $\int_a^\infty f(x)dx$ jest

zbieżna. Jeżeli granica ta jest nieskończona lub nie istnieje to $\int_a^\infty f(x)dx$ jest **rozbieżna**.

Analogicznie definiujemy $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx$

Def. Mówimy, że $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna jeżeli istnieją skończone całki: $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ i $\int_a^\infty f(x)dx$;

wtedy $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$.

Uwaga. Wartość całki nie zależy od wyboru punktu a .

Przykład. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{zbieżna dla } \alpha > 1 \\ \text{rozbieżna dla } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Zbieżność całki funkcji nieujemnej

- $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$
- $\forall_{A \geq a} f \in R[a, A]$

$F(A) = \int_a^A f(x)dx$ - funkcja niemalejąca (bo $f \geq 0$)

Wobec tego zawsze istnieje granica $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ (skończona lub nie). Granica ta jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $F(A)$ jest ograniczona. Mamy wobec tego

Tw. (kryterium zbieżności)

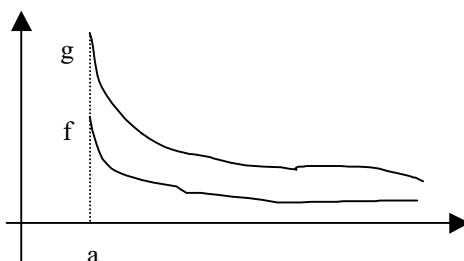
Jeżeli $f \geq 0$, to $\int_a^\infty f(x)dx$ - jest zbieżna $\Leftrightarrow \exists_M \forall_{A>a} \int_a^A f(x)dx \leq M$

To ogólne kryterium pozwala wyprowadzić dwa kryteria porównawcze.

Tw. (I kryterium porównawcze)

Niech $\forall_{x \geq a} 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

- $\int_a^\infty g(x)dx$ - zbieżna $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ - zbieżna,
- $\int_a^\infty f(x)dx$ - rozbieżna $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ - rozbieżna.



Uwaga. W powyższym kryterium wystarczy że nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$ są prawdziwe począwszy od pewnego $A>a$ czyli dla $x \geq A>a$.

Tw. (II kryterium porównawcze -asymptotyczne)

Założmy, że istnieje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ (skończona lub nie). Wówczas:

- $K < \infty$; $\int_a^\infty g(x)dx$ - zbieżna $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ - zbieżna,
- $K > 0$; $\int_a^\infty g(x)dx$ - rozbieżna $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ - rozbieżna,
- $0 < K < \infty$; $\int_a^\infty f(x)dx$ i $\int_a^\infty g(x)dx$ są obie zbieżne albo obie rozbieżne.

Dowód Niech $0 < K < \infty$. Z definicji granicy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ wynika, że

$\forall \varepsilon \exists M \forall x \geq M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| \leq \varepsilon$, czyli $K - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq K + \varepsilon$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ takie, że $K - \varepsilon > 0$. Stąd dla $x \geq M$ mamy $0 < (K - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (K + \varepsilon)g(x)$. Z I kryterium porównawczego otrzymujemy tezę. Pozostałe przypadki dowodzi się podobnie. Jeśli $K = 0$, to

$0 < f(x) \leq \varepsilon g(x)$ i ze zbieżności całki $\int_a^\infty g(x)dx$ wynika zbieżność $\int_a^\infty f(x)dx$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$,

czyli $\forall \exists \forall \quad \begin{matrix} C \\ M \end{matrix} \quad \forall \quad \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \quad x \geq M \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq C$ więc dla $x \geq M$ mamy $0 < Cg(x) \leq f(x)$ i z rozbieżności całki

$\int_a^\infty g(x)dx$ wynika rozbieżność $\int_a^\infty f(x)dx$.

Przykład. Całka $\int_5^\infty \frac{e^x}{x(e^x-1)}dx$ jest rozbieżna, bo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x}{x(e^x-1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 1$ i $\int_5^\infty \frac{1}{x}dx$ jest rozbieżna.

Zbieżność całki funkcji dowolnego znaku

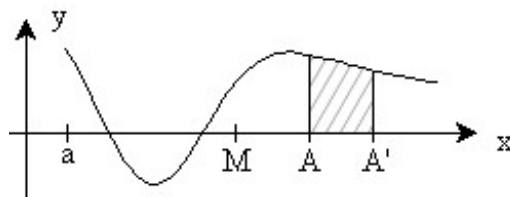
Rezygnujemy z założenia $f \geq 0$. Zagadnienie istnienia całki $\int_a^\infty f(x)dx$ sprowadza się zgodnie z

definicją do zagadnienia istnienia skończonej granicy funkcji $F(A) = \int_a^A f(x)dx$, gdy $A \rightarrow \infty$.

Istnienie skończonej granicy funkcji sprowadza się do istnienia skończonej granicy ciągu wartości funkcji dla każdego rozbieżnego do $+\infty$ ciągu argumentów. Z kolei istnienie granicy ciągu liczbowego jest równoważne spełnieniu przez ten ciąg warunku Cauchy'ego. Wobec tego mamy więc następujące

Tw. Kryterium zbieżności:

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ - jest zbieżna} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_M \forall_{A, A' \geq M} \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$$



Z nierówności $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ i powyższego kryterium stwierdzamy, że jeżeli całka

$\int_a^\infty |f(x)|dx$ - jest zbieżna, to całka $\int_a^\infty f(x)dx$ - jest zbieżna ale nie na odwrót!

Jeżeli $\int_a^\infty |f(x)|dx$ - jest zbieżna, to $\int_a^\infty f(x)dx$ nazywamy **bezwzględnie zbieżną**.

Tw. $\int_a^\infty f(x)dx$ - jest bezwzględnie zbieżna $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ - jest zbieżna.

Jeżeli $\int_a^\infty f(x)dx$ - jest zbieżna, a $\int_a^\infty |f(x)|dx$ - rozbieżna, to $\int_a^\infty f(x)dx$ nazywamy **warunkowo zbieżną**.

Przykład. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ - jest zbieżna (do $\frac{\pi}{2}$) natomiast nie jest bezwzględnie zbieżna.

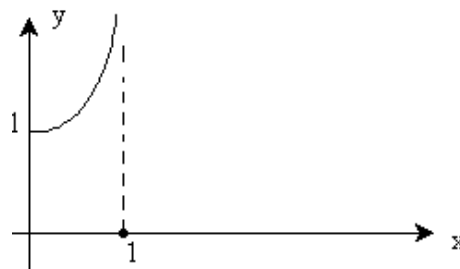
II Całka niewłaściwa funkcji nieograniczonej

Niech

- $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < a < b < \infty$
- $\forall_{c \in [a,b)} f \in \mathcal{R}[a,c]$
- $\forall_{c \in [a,b)} f$ jest nieograniczona na $[c,b]$, czyli b jest jedynym punktem osobliwym.

Np.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x \in [0;1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$



Uwaga: Wartość funkcji w punkcie osobliwym jest nieistotna, tzn. nie ma wpływu na ewentualną wartość całki, bo zmiana wartości funkcji podcałkowej w skończonej ilości punktów nie wpływa na wartość całej całki.

Def. Jeżeli istnieje granica (skończona lub nie) $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ to tę granicę nazywamy całką

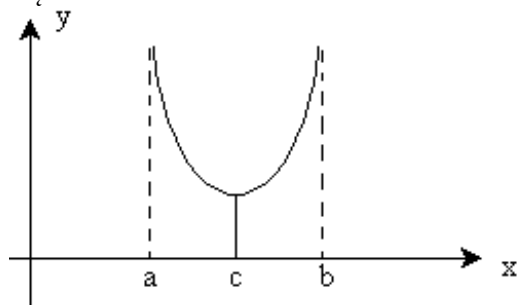
niewłaściwą funkcji f na $[a,b]$ i oznaczamy $\int_a^b f(x) dx$. Jeżeli powyższa granica jest skończona

to mówimy, że całka jest zbieżna, a funkcję f nazywamy całkowaną na $[a,b]$. Jeżeli granica ta jest niewłaściwa nie istnieje to całkę nazywamy rozbieżną.

Podobnie definiujemy całkę $\int_a^b f(x) dx$, gdy jedynym punktem osobliwym jest a $\int_a^b f(x) dx =$

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

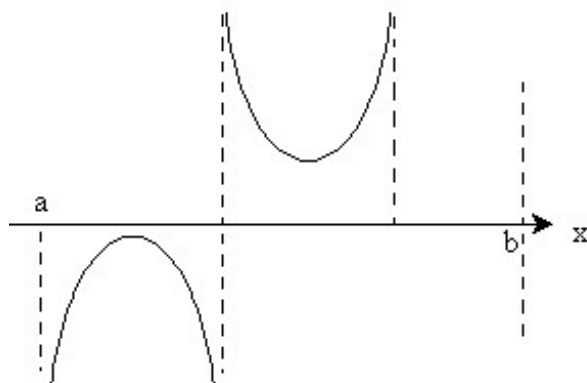
Def. Jeżeli a i b są jedynymi osobliwymi punktami to wybieramy dowolny punkt $c \in (a,b)$ i przyjmujemy, że z definicji $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, o ile obie całki po prawej stronie istnieją i są skończone.



Uwaga: Wynik nie zależy od wyboru punktu c .

Jeżeli $[a, b]$ zawiera $n+1$ punktów osobliwych $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, to mówimy, że funkcja f jest całkowna na $[a, b]$ jeżeli istnieją skończone całki $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$, $k = 1, 2, \dots, n$. Wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$



Przykład. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{zbieżna dla } \alpha < 1 \\ \text{rozbieżna dla } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Podobnie jak w przypadku całki $\int_a^\infty f(x)dx$ można sformułować kryteria zbieżności dla całki $\int_a^b f(x)dx$, gdy b jest jedynym punktem osobliwym funkcji f .

Zbieżność całki z funkcji nieujemnej

Jeżeli funkcja f jest **nieujemna**, to $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ jest niemalejącą funkcją, więc skończona granica $\lim_{c \rightarrow b^-} F(c)$ istnieje, gdy $F(c)$ jest ograniczona.

Tw. Kryterium zbieżności

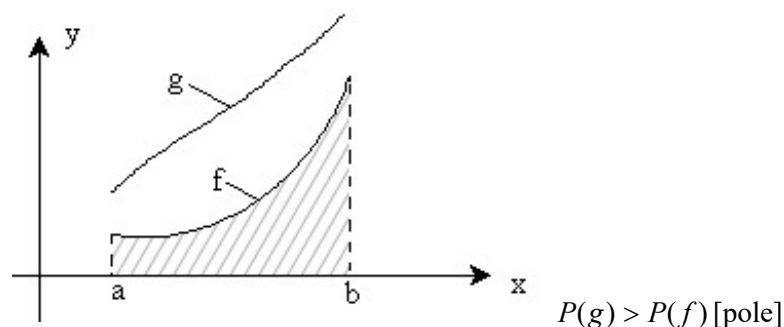
Jeżeli $f \geq 0$, to $\int_a^b f(x)dx$ - jest zbieżna $\Leftrightarrow \exists_M \forall_{c \in (a, b)} \int_a^c f(x)dx \leq M$ (ograniczona).

Otrzymujemy stąd dwa kryteria porównawcze:

Tw. (I kryterium porównawcze)

Niech $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b)$. Wówczas:

- $\int_a^b g(x)dx$ - zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - zbieżna,
- $\int_a^b f(x)dx$ - rozbieżna $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ - rozbieżna.



Tw. (II kryterium porównawcze - asymptotyczne)

Założmy, że istnieje $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ (skończona lub nie). Wówczas:

- $K < \infty$; $\int_a^b g(x)dx$ - zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - zbieżna,
- $K > 0$; $\int_a^b g(x)dx$ - rozbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - rozbieżna,
- $0 < K < \infty$; $\int_a^b g(x)dx$ i $\int_a^b f(x)dx$ są obie zbieżne albo obie rozbieżne.

Zbieżność całki z funkcji dowolnego znaku

Podobnie jak w przypadku całki $\int_a^\infty f(x)dx$ dla całki $\int_a^b f(x)dx$ funkcji której jedynym punktem osobliwym jest punkt b mamy następujące

Tw. Kryterium zbieżności:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ - jest zbieżna} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_{b-\delta \leq A, A' < b} \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$$

Def. Całkę $\int_a^b f(x)dx$ nazywamy bezwzględnie zbieżną gdy $\int_a^b |f(x)|dx$ - zbieżna

i warunkowo zbieżną gdy $\int_a^b f(x)dx$ - zbieżna, ale $\int_a^b |f(x)|dx$ - rozbieżna.

Tw. $\int_a^b f(x)dx$ - jest bezwzględnie zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ - jest zbieżna.

Uwagi o innych całkach. (wartość główna w sensie Cauchy'ego)

$$(\text{vp}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x)dx$$

- $$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx - \text{istnieje} \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - \text{istnieje}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - \text{istnieje} \Rightarrow (\text{vp}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \text{istnieje}$$
- $$c \in (a, b) \text{ jest jedynym punktem osobliwym} \quad (\text{vp}) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right\}$$

$$(\text{vp}) \int_a^b f(x) dx - \text{istnieje} \not\Rightarrow \int_a^b f(x) dx - \text{istnieje}$$

$$\int_a^b f(x) dx - \text{istnieje} \Rightarrow (\text{vp}) \int_a^b f(x) dx - \text{istnieje}$$

Funkcja Γ Eulera jest dla $x > 0$ definiowana wzorem

- $$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Rozbijając całkę niewłaściwą na sumę całek $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ można pokazać, że całka niewłaściwa występująca w definicji funkcji Γ jest zbieżna. Rzeczywiście dla $t \in (0, 1]$ i

dowolnego $x > 0$ mamy $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$ i $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} < \infty$, natomiast dla $t \in [1, \infty)$ i dowolnego

$x > 0$ prawdziwe jest oszacowanie $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{t^{[x]}}{e^t} \leq \frac{t^{[x]}}{t^{[x]+2}} = \frac{([x]+2)!}{t^2}$ i

$\int_1^{\infty} \frac{([x]+2)!}{t^2} dt = ([x]+2)!$, więc całka $\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ jest zbieżna.

Z definicji widać, że

- $$\Gamma(1) = 1$$

Całkując przez części łatwo pokazać, że

- $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Rzeczywiście

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{ll} f(t) = t^x & g'(t) = e^{-t} \\ f'(t) = xt^{x-1} & g(t) = -e^{-t} \end{array} \right\} = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Stąd $\Gamma(n+1) = n!$

Ponadto wykorzystując całkę podwójną pokażemy, że

- $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

