

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

W kolejnych wykładach uogólnimy pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej na przypadek funkcji wielu zmiennych. Z uwagi na prostotę zapisu i łatwe interpretacje graficzne ograniczymy się głównie do funkcji 2 lub 3 zmiennych.

Rozważmy znany z kursu algebry zbiór R^k , którego elementy $(x_1, \dots, x_k)$ możemy traktować jako

- punkty $P(x_1, \dots, x_k)$ w k -wymiarowej przestrzeni z naturalnym układem współrzędnych,
- wektory $\overrightarrow{OP}$ zaczepione w ustalonym punkcie O , będącym początkiem układu współrzędnych i końcu w zadanym punkcie $P(x_1, \dots, x_k)$,
- wektory swobodne $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ w k -wymiarowej **przestrzeni liniowej** R^k , które można zaczepiać w dowolnym punkcie.

W zbiorze R^k możemy zdefiniować odległość ρ pomiędzy punktami $P(x_1, \dots, x_k)$ i $Q(y_1, \dots, y_k)$ wzorem

$$\rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}.$$

Określona powyżej funkcja $\rho(\cdot, \cdot): R^k \times R^k \rightarrow [0, \infty)$ zwana metryką (odległością) euklidesową spełnia następujące warunki:

1. $\forall_{P_1, P_2 \in R^k} \rho(P_1, P_2) \geq 0$ i $\rho(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
2. $\forall_{P_1, P_2 \in R^k} \rho(P_1, P_2) = \rho(P_2, P_1)$
3. $\forall_{P_1, P_2, P_3 \in R^k} \rho(P_1, P_3) \leq \rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3)$ (warunek trójkąta)

Powyższe warunki możemy potraktować jako warunki definiujące metrykę $\rho(\cdot, \cdot)$.

Można sprawdzić, że także funkcje określone wzorami

- $\rho_1(P, Q) = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - y_i|$
- $\rho_2(P, Q) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$

również definiują metrykę w R^k .

Parę (R^k, ρ) , gdzie $\rho(\cdot, \cdot)$ jest dowolną metryką nazywamy **przestrzenią metryczną**. Jeśli nie będzie to wyraźnie zaznaczone, to zakładamy, że w R^k rozważamy metrykę euklidesową.

Przykłady przestrzeni metrycznych

- $X = R$ $\rho(x, y) = |x - y|$

- $X \neq \emptyset$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$ (metryka dyskretna)
- (X, ρ) prz. metr. $\Rightarrow \rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ również jest metryką w X (ograniczoną przez 1)

Przestrzeń unormowana

Traktując R^k jako **przestrzeń wektorową** nad ciałem R ze zwykłymi działaniami dodawania wektorów $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k),$$

oraz mnożenia wektora przez skalar

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)$$

możemy zdefiniować pojęcie normy euklidesowej wektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ wzorem

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}.$$

Przypomnienie z algebry

Niech X będzie **przestrzeń liniową** (wektorową) nad ciałem K ($K = R$)

Def. Normą w przestrzeni liniowej nad ciałem K (C lub R) nazywamy rzeczywistą funkcję

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\| \geq 0$, przy czym:

- 1° $\forall_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- 2° $\forall_{\alpha \in K} \forall_{\mathbf{x} \in X} \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$
- 3° $\forall_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

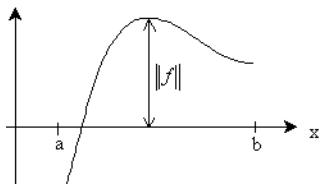
Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną. Norma jest odpowiednikiem pojęcia długości wektora.

Np. $X = R^k$ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$

- $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ - norma euklidesowa (norma l_2)
- $\|\mathbf{x}\|_{l_\infty} = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$ - norma max lub l_∞
- $\|\mathbf{x}\|_{l_1} = \sum_{i=1}^k |x_i|$ - norma l_1

Np. $X = C_{[a,b]}$ - zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych **ciągłych** na $[a, b]$

$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ - norma supremum (sup=max bo f jest cg. na przedziale $[a, b]$)



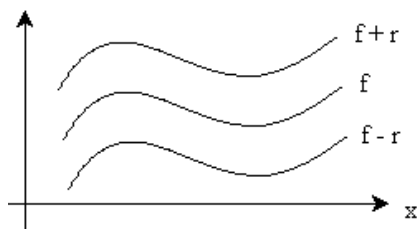
Fakt. Przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną z metryką $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Pojęcia związane z metryką:

(X, ρ) - przestrzeń metryczna.

- **Kula** : $K(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$,
Jak wyglądają kule w R^2 w różnych metrykach
- **Otoczenie** (kuliste) punktu x_0 : $Ot(x_0, r) = K(x_0, r)$
- **Sąsiedztwo** punktu x_0 : $S(x_0, r) = K(x_0, r) - \{x_0\}$

Kula w przestrzeni $X = C_{[a,b]}$ z metryką Czebyszewa



$K(f, r)$ - wszystkie funkcje ciągłe, których wykresy leżą pomiędzy $f - r$ a $f + r$.

Funkcja rzeczywista k zmiennych rzeczywistych

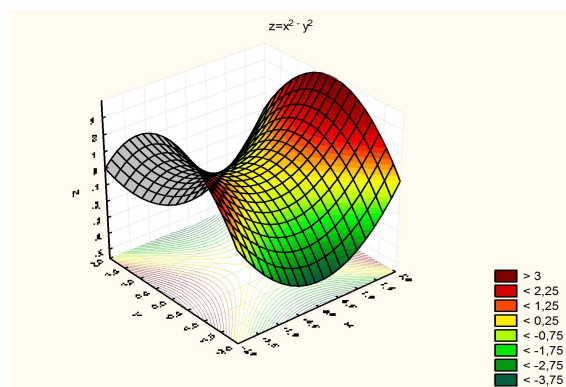
Utożsamiając punkt P z jego współrzędnymi $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ rozważać będziemy rzeczywistą funkcję punktu P jako funkcję wielu zmiennych (współrzędnych punktu)

$$f: R^k \supset D \ni \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) \in R$$

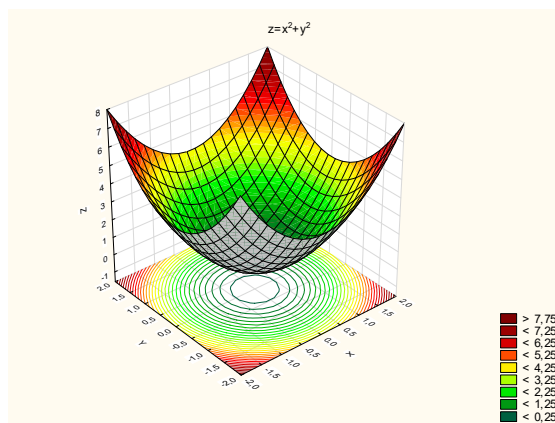
Przykład. $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$ jest rzeczywistą funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych określoną na prostokącie $[-a, a] \times [-b, b]$.

Przykładowe wykresy funkcji 2 zmiennych- przekroje- powierzchnie obrotowe np.:

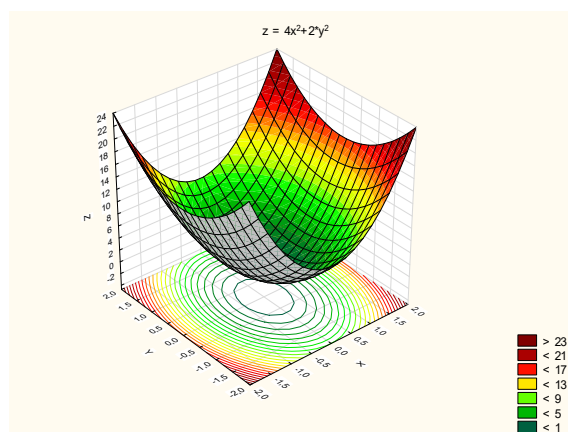
- Paraboloidea hiperboliczna $f(x,y) = x^2 - y^2$
(siodło)



- paraboloida obrotowa $f(x,y)=x^2+y^2$



- paraboloida eliptyczna $f(x,y)=4x^2+9y^2$



Granica ciągu o wartościach w R^k

Wiadomo, że ciąg o wartościach rzeczywistych to funkcja rzeczywista określona na zbiorze liczb rzeczywistych. Podobnie funkcję $P : N \ni n \rightarrow P(n) = P_n \in R^k$ nazwiemy ciągiem w przestrzeni R^k .

Przyjmując oznaczenia $P_n = (x_1^n, \dots, x_k^n)$, $P = (g_1, \dots, g_k)$ możemy zdefiniować granice ciągu w R^k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P_n, P) = 0$$

przy czym odległość $\rho(P, Q)$ pomiędzy punktami $P = (x_1, \dots, x_k)$ i $Q = (y_1, \dots, y_k)$ jest zadana

$$\text{wzorem } \rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}.$$

Uwaga. Powyżej zdefiniowana zbieżność jest równoważna zbieżności „po współrzędnych” - uzasadnić.

Przykład. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}, \frac{2n}{n+1} \right) = (e, 1, 2)$

Podobnie jak w rozważanym poprzednio przypadku funkcji $f: R \rightarrow R$ rzeczywistej zmiennej rzeczywistej możemy zdefiniować otoczenie i sąsiedztwo punktu w przestrzeni metrycznej

$$Ot(P_0, \delta) = K(P_0, \delta) = \{P \in D_f : \rho(P, P_0) < \delta\} ; S(P_0, \delta) = Ot(P_0, \delta) - \{P_0\}$$

Powyższą definicję granicy ciągu o wartościach w R^k możemy uogólnić na przypadek ciągu o wartościach w przestrzeni metrycznej

Def. (granicy ciągu o wartościach w przestrzeni metrycznej (X, ρ)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} \rho(P_n, P) \leq \varepsilon$$

Pytanie. Czy ciąg $(\frac{1}{n})$ jest zbieżny w przestrzeni R z metryką dyskretną. Jak wyglądają ciągi zbieżne w przestrzeni metrycznej z metryką dyskretną.

To, czy ciąg ma granicę czy nie zależy nie tylko od ciągu ale i od metryki. Ten sam ciąg może być zbieżny w sensie jednej metryki a rozbieżny w sensie innej metryki.

Podobnie jak w przypadku ciągów rzeczywistych możemy wprowadzić pojęcie **ciągu fundamentalnego** czyli spełniającego warunek Cauchy'ego

$$(C) \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n, m \geq n_0} \rho(P_m, P_n) \leq \varepsilon.$$

Tw. Jeżeli ciąg (P_n) punktów przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest zbieżny, to spełnia on warunek Cauchy'ego $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{m, n \geq n_0} \rho(P_m, P_n) < \varepsilon$.

Uwaga. W przypadku ciągów rzeczywistych prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, a w ogólnym przypadku nie.

Def. Przestrzeń metryczną (X, ρ) nazywamy **zupełną**, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni (X, ρ) jest zbieżny (do elementu przestrzeni (X, ρ)).

Przykłady

- $(R, |\cdot|)$ jest przestrzenią zupełną a $(Q, |\cdot|)$ nie jest przestrzenią zupełną
- (R^k, ρ) jest przestrzenią zupełną

Def. Zbieżność ciągu w przestrzeni unormowanej a więc także metrycznej z metryką indukowaną przez normę, nazywamy **zbieżnością w sensie normy**.

Def. Przestrzeń Banacha nazywamy **przestrzeń liniową**, unormowaną i zupełną.

Metryka $d_c(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ (Czebyszewa) w przestrzeni $C_{[a, b]}$ rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ indukowana przez normę $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, jest **metryką zbieżności jednostajnej**.

Def. Punkt $P_0 \in X$ nazywamy **punktem skupienia** zbioru $A \subset X \Leftrightarrow$ istnieje ciąg $(P_n) \subset A$ taki, że

$$\forall_n P_n \neq P_0 \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$$

Def. Punkt zbioru A , który nie jest jego punktem skupienia nazywamy **punktem izolowanym zbioru**.

Charakteryzacja otoczeniowa punktów i zbiorów w przestrzeni metrycznej.

(X, ρ) - przestrzeń metryczna, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, (przypomnienie - $K(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$)

Def. Punkt $a \in A$ nazywamy **punktem izolowanym** zbioru $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \quad K(a, r) \cap A = \{a\}$.

Def. Punkt $a \in A$ nazywamy **punktem wewnętrznym** zbioru $\Leftrightarrow \exists r > 0 \ K(a, r) \subset A$.

Def. Punkt $a \in X$ jest **punktem brzegowym** zbioru $A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ K(a, r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(a, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

Def. Punkt $a \in X \setminus A$ jest **punktem zewnętrznym** zbioru $A \Leftrightarrow \exists r > 0 \ K(a, r) \cap A = \emptyset$

Uwaga. Punkt wewnętrzny zbioru A należy do A , punkt zewnętrzny należy do jego dopełnienia, a brzegowy może należeć do A albo do $X \setminus A$.

Def. Punkt $a \in X$ jest **punktem skupienia** zbioru $A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ (K(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Def. Zbiór $A \subset X$ jest **otwarty**, gdy składa się z samych punktów wewnętrznych.

Def. Zbiór $A \subset X$ jest **domknięty** $\Leftrightarrow A' = X \setminus A$ jest zbiorem otwartym.

Def. **Wnętrze zbioru** A (oznaczenie - $\text{int } A$) to zbiór wszystkich punktów wewnętrznych.

Def. **Brzeg zbioru** A (oznaczenia - $\text{Fr } A$ lub ∂A), to zbiór wszystkich punktów brzegowych.

Wnioski:

- A jest otwarty $\Leftrightarrow A = \text{int } A$
- Wnętrze zbioru A to największy zbiór otwarty zawarty w danym zbiorze.

Def: **Domknięciem** zbioru $A \subset X$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty $\bar{A}$ nakrywający zbiór A .

Def. Punkt $a \in X$ jest **punktem domknięcia** zbioru $A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ K(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

Wnioski

- Każdy punkt skupienia zbioru A jest punktem domknięcia zbioru A , ale nie odwrotnie, bo np. punkt izolowany jest punktem domknięcia, ale nie jest punktem skupienia.
- Zbiór domknięty zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

Własności zbiorów otwartych i domkniętych

Tw. a) Suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

b) Iloczyn skończonej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dow. (a) Mamy rodzinę zbiorów otwartych: $\{A_s\}_{s \in S} : \forall s \in S \ A_s$ -otwarty. Należy pokazać, że: $\bigcup_{s \in S} A_s$

jest również zbiorem otwartym. Niech $\mathbf{x}$ będzie dowolnym punktem należącym do

$$\bigcup_{s \in S} A_s \Leftrightarrow \exists s \in S : \mathbf{x} \in A_s \Rightarrow \exists_r : K(\mathbf{x}, r) \subset A_s \Rightarrow \exists_r : K(\mathbf{x}, r) \subset \bigcup_{s \in S} A_s \Leftrightarrow \text{suma jest}$$

zbiorem otwartym.

Dow. (b): $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} : \mathbf{x} \in A_i \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} \exists_{r_i} : \mathbf{x} \in K(\mathbf{x}, r_i) \subset A_i \Rightarrow$

$$\exists_{r = \min\{r_1, \dots, r_n\}} : \mathbf{x} \in K(\mathbf{x}, r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i \text{ co oznacza, że } \bigcap_{i=1}^n A_i \text{ jest zbiorem otwartym.}$$

Z praw De Morgana wynika, że:

- iloczyn dowolnej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym
- suma skończonej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

GRANICA FUNKCJI

Granica funkcji w punkcie skupienia

(X, ρ_x) - przestrzeń metryczna, $D \subset X$, x_0 - punkt skupienia zbioru D .

(Y, ρ_y) - przestrzeń metryczna

$$f : X \supset D \rightarrow Y$$

Metryka indukowana w podzbiorze D przestrzeni metrycznej X

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną a $D \subset X$ niepustym podzbiorem przestrzeni X . Obcinając dziedzinę metryki z $X \times X$ do $D \times D$ otrzymamy nową przestrzeń metryczną (D, ρ_D) - gdzie $\rho_D = \rho|_{D \times D}$ - **metryka indukowana** (obcięta)

Uwaga . Zbiory otwarte w D są przecięciami zbioru D ze zbiorami otwartymi w X

$$\text{W szczególności } S(x_0, \delta) = \{x \in D : 0 < \rho(x_0, x) < \delta\}$$

Niech $f : X \supset D \rightarrow Y$, x_0 - **punkt skupienia** zbioru D .

Def. (Heine) Punkt $g \in Y$ jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Powyższa definicja jest równoważna następującej

Def. (Cauchy) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} 0 < \rho_x(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), g) \leq \varepsilon$

Komentarz: Punkt skupienia x_0 nie musi należeć do D , czyli funkcja nie musi być określona w x_0 . Nawet jeśli funkcja jest określona w x_0 , to wartość funkcji w tym punkcie nie wpływa na granice funkcji.

Ciągłość funkcji w punkcie

$(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ - przestrzenie metryczne, $\emptyset \neq D \subset X$, $x_0 \in D$ (!)

Def. Funkcję $f : X \supset D \rightarrow Y$ nazywamy ciągłą w punkcie x_0 jeżeli

- Heine $\forall_{(x_n) \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$
- Cauchy $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} \rho_x(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$

Uwaga: Punkt $x_0 \in D$ ale nie musi być on punktem skupienia zbioru D . Jeżeli $x_0 \in D$ jest punktem izolowanym zbioru D to z definicji funkcja jest ciągła w punkcie izolowanym. Jeżeli

natomiast $x_0 \in D$ jest punktem skupienia zbioru D to z definicji funkcja jest ciągła w punkcie skupienia $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ciągłość punktowa

$(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ - przestrzenie metryczne, $f: X \supset D \rightarrow Y$

Def. Funkcja f jest punktowo ciągła w D jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru D , czyli

f jest punktowo ciągła w $D \Leftrightarrow$

$$(C) \quad \forall_{x_1 \in D} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta(x_1, \varepsilon) > 0} \forall_{x_2 \in D} \quad \rho_x(x_1, x_2) \leq \delta \Rightarrow \rho_y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

$$(H) \quad \forall_{x \in D} \forall_{(x_n) \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

Ciągłość jednostajna

$(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ - przestrzenie metryczne, $f: X \supset D \rightarrow Y$

Def. Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** w D gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x_1 \in D} \forall_{x_2 \in D} \quad \rho_x(x_1, x_2) \leq \delta \Rightarrow \rho_y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy korzystając z tautologii $\{\exists x \forall y : \varphi(x, y)\} \Rightarrow \{\forall y \exists x : \varphi(x, y)\}$

Tw. Jeżeli f jest **jednostajnie ciągła** na D , to f jest **punktowo ciągła** na D .

Problem. Jak praktycznie badać jednostajną ciągłość funkcji?

Użytecznym pojęciem jest tzw. **moduł ciągłości** funkcji.

Def. Modułem ciągłości funkcji $f: X \supset D \rightarrow Y$ nazywamy funkcję

$$\omega_f(\delta) = \omega(f, \delta) \stackrel{df}{=} \sup \{ \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) : x_1, x_2 \in D \wedge \rho_X(x_1, x_2) \leq \delta \}$$

Tw. Funkcja $f: X \supset D \rightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła na $D \Leftrightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \omega(f, \Delta) = 0$

Dowód .

$f: X \supset D \rightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła na D

$\Updownarrow$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A} \forall_{y \in A} \quad \rho_x(x, y) \leq \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{\Delta \leq \delta} \quad \omega(f, \Delta) \leq \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \omega(f, \Delta) = 0$$

Inna definicja ciągłości funkcji w przestrzeni metrycznej:

Def. Funkcja f jest (punktowo) ciągła na $X \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \forall_{\varepsilon > 0} \forall_{x \in X} \exists_{\delta(x, \varepsilon) > 0} \forall_{y \in X} \quad \rho_x(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(y)) < \varepsilon \\ \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ y \in K(x, \delta) \qquad f(y) \in K(f(x), \varepsilon) \\ \Downarrow \\ y \in f^{-1}[K(f(x), \varepsilon)] \\ \Downarrow \\ K(x, \delta) \subset f^{-1}[K(f(x), \varepsilon)] \end{aligned}$$

Motywuje to następującą definicję:

Def. Funkcja f jest ciągła na $X \Leftrightarrow \forall_{A \subset Y} A\text{-otwarty w } Y \Rightarrow f^{-1}[A] \text{-otwarty w } X$.

Uwaga. W definicji tej nie występuje jawnie pojęcie metryki, tylko zbioru pojęcie otwartego. Dążąc do uogólnienia pojęcia funkcji ciągłej można zdefiniować najpierw zbiory otwarte, a później w powyższy sposób zdefiniować ciągłość funkcji.

W zbiorze X rozważamy rodzinę $\mathfrak{T}$ podzbiorów zbioru X , czyli $\mathfrak{T} \subset 2^X$, gdzie 2^X oznacza rodzinę wszystkich możliwych podzbiorów zbioru X

Def: Rodzinę $\mathfrak{T} \subset 2^X$ spełniającą warunki

- 1° $\emptyset \in \mathfrak{T}, X \in \mathfrak{T}$
- 2° $\forall S \in \mathcal{S} \quad A_s \in \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{s \in S} A_s \in \mathfrak{T}$
- 3° $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{T}$

nazywamy **topologią** w X a jej elementy (czyli zbiory) zbiorami otwartymi.

$(X, \mathfrak{T}_x), (Y, \mathfrak{T}_y)$ - przestrzenie topologiczne

Def. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła na $X \Leftrightarrow \forall_{A \subset Y} A \in \mathfrak{T}_y \Rightarrow f^{-1}[A] \in \mathfrak{T}_x$

Wprowadzanie pewnych pojęć, za pomocą których można zdefiniować ciągłość funkcji, nazywamy **zadawaniem topologii**.

Uwagi. Słowo topologia występuje przynajmniej w dwóch znaczeniach.

- Zespół pojęć za pomocą których definiujemy ciągłość
- Rodzina zbiorów otwartych

Topologię można zadać

- poprzez metrykę
- poprzez zdefiniowanie rodziny zbiorów otwartych (czyli topologii)
- poprzez aksjomatyczne zdefiniowanie ciągów zbieżnych i definicję ciągłości typu Heinego (topologia ciągowa L - Frecheta)

Zbiory zwarte i ich własności

(X, ρ) - przestrzeń metryczna

Def. $A \subset X$ nazywamy zbiorem **zwartym** jeżeli z każdego ciągu $(x_n) \subset A$ można wybrać podciąg zbieżny (x_{n_k}) do elementu zbioru A , (czyli $\forall (x_n) \subset A \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) : x_{n_k} \rightarrow x_0 \in A$)

Np.: Przedział $[a, b]$ jest zbiorem zwartym w $(R, |\cdot|)$.

Przedział $[a, b]$ jest ograniczony $\xRightarrow{Tw. B-W}$ z każdego ciągu elementów przedziału $[a, b]$ można wybrać podciąg zbieżny. Granicą tego podciągu zbieżnego jest punkt skupienia przedziału. Przedział domknięty z definicji zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, czyli również ten, do którego zbieżny jest wybrany podciąg.

Tw. W przestrzeni metrycznej **zbiór zwarty jest domknięty i ograniczony**.

Dowód. (domkniętość). Mamy pokazać, że $A = \bar{A}$. Przypuśćmy dla dowodu **nie wprost**, że istnieje $a \in \bar{A}$ i $a \notin A$. Punkt a musi być więc punktem skupienia (punkt izolowany zbioru należy do zbioru). Istnieje więc ciąg $(x_n) \subset A$ taki, że $x_n \rightarrow a$. Ze zwartości A z ciągu x_n można wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru A . Ponieważ każdy podciąg ciągu zbieżnego do a jest zbieżny do a wnioskujemy, że $a \in A$. (sprzeczność).

Ograniczoność. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że A jest zbiorem zwartym i nieograniczonym. Z nieograniczoności A wynika, że istnieje ciąg $(x_n) \subset A$, taki, że $\rho(x_n, a) \geq n \quad \forall n$. Ale ze zwartości A wynika, że z ciągu (x_n) można wybrać podciąg x_{n_k} zbieżny do $x_0 \in A$. Z ciągłości metryki $\rho(x_{n_k}, a) \rightarrow \rho(x_0, a)$, co przeczy warunkowi $\rho(x_{n_k}, a) \geq n_k \quad \forall k$ (sprzeczność).

Uwaga. W drugą stronę twierdzenie to nie jest prawdziwe. Ale w (R^n, ρ_E) [metryka euklidesowa] zbiór zwarty $\Leftrightarrow$ domknięty i ograniczony.

Tw. Domknięty podzbiór B zbioru zwartego A jest zbiorem zwartym

Dow. Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \subset B \subset A$. Ze zwartości A wynika, że można wybrać podciąg

$(x_{n_k}) \rightarrow x_0 \in A$. Stąd x_0 jest punktem skupienia zbioru B , a z domkniętości B wynika, że $x_0 \in B$, co dowodzi zwartości B .

Def. (X, ρ) - przestrzeń metryczna, X – zbiór zwarty $\Leftrightarrow (X, \rho)$ - **przestrzeń zwarta**.

Przykłady

- $([a,b], |\cdot|)$ – przestrzeń metryczna zwarta
- $A \subset \mathbb{R}^n, A$ – domknięty $\Rightarrow (A, \rho_E)$ – przestrzeń metryczna zwarta

Tw. Ciągły obraz zbioru zwartego jest zbiorem zwartym.

tzn, $f: X \rightarrow Y$ ciągła X, Y prz. metr. X -zwarta $\Rightarrow Y$ -zwarta

Dow. Weźmy dowolny ciąg wartości $(y_n) \subset f[X]$, czyli $\exists_{(x_n) \subset X} : y_n = f(x_n)$. X to przestrzeń zwarta, wobec tego z ciągu (x_n) można wybrać podciąg zbieżny $\exists_{(x_{n_k})} : x_{n_k} \rightarrow x_0 \in X$. Z definicji ciągłości Heine'go wynika, że $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \Leftrightarrow y_{n_k} \rightarrow y_0$. Z dowolnego ciągu (y_n) wybraliśmy więc podciąg zbieżny $y_{n_k} \rightarrow y_0 \in f[X]$