

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Niech funkcja $f: R^n \supset D \rightarrow R$ (D – otwarty) posiada pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w każdym punkcie

$\mathbf{x} \in D$. Jest więc określona funkcja

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: R^n \supset D \ni \mathbf{x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

Jeżeli powyższa funkcja ma pochodną cząstkową po j -tej zmiennej $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right](\mathbf{x})$ w punkcie $\mathbf{x}$, to

nazywamy ją drugą pochodną cząstkową funkcji f po zmiennych x_i, x_j i oznaczamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = f''_{x_j x_i}(\mathbf{x}).$$

Uwaga: Jeżeli $i = j$ to będziemy stosować oznaczenie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$ (pochodna czysta)

Jeżeli $i \neq j$ to $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ (pochodna mieszana)

Tw. (Schwarza) (Malec s.92) Jeżeli pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ są ciągłe w punkcie $\mathbf{x}$, to są równe.

Podobnie definiujemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Pochodne mieszane, które różnią się jedynie kolejnością różniczkowania, jeżeli są ciągłe to są sobie równe.

Przykład Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $(0, 0)$ i jej pochodne

cząstkowe są równe odpowiednio:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y^5}{\Delta y^5} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^5}{\Delta x^5} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Poza punktem $(0, 0)$ pochodne mieszane są sobie równe (bo są ciągłe) ale nie są ciągłe w punkcie $(0, 0)$,

bo nie istnieją granice $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ w punkcie $(0, 0)$.

Różniczki wyższych rzędów

Oznaczenia $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ $f : Ot(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow R$

Różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{a}$ dla przyrostu $\Delta \mathbf{x}$ nazywamy wyrażenie

$$df(\mathbf{a}, \Delta \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \Delta x_i$$

Jeżeli przy ustalonym $\Delta \mathbf{x}$ funkcja $d(\cdot, \Delta \mathbf{x}) : Ot(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow R$ ma różniczkę punkcie $\mathbf{a}$, to nazywamy ją **drugą różniczką** funkcji f w punkcie $\mathbf{a}$ i oznaczamy $d^2 f(\mathbf{a}, \Delta \mathbf{x})$.

Przykład. Wyprowadzić wzór na drugą różniczkę funkcji dwóch zmiennych. (zakładamy ciągłość pochodnych mieszanych)

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (\Delta x_1, \Delta x_2)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \Delta x_2 \\ d^2((x_1, x_2), (\Delta x_1, \Delta x_2)) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \Delta x_2 \right] \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \Delta x_2 \right] \Delta x_2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \Delta x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \Delta x_2^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 f \end{aligned}$$

Druga różniczka funkcji wielu zmiennych w danym punkcie jest formą kwadratową przyrostów

$$d^2 f((x_1, \dots, x_n), (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \Delta x_i \Delta x_j$$

Uwagi o zapisie macierzowym drugiej różniczki.

$$d^2((x_1, \dots, x_n), (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)) = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

Wzór na m -tą różniczkę funkcji n zmiennych

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^m f$$

Zadanie. Napisać wzór na drugą różniczkę funkcji trzech zmiennych i trzecią różniczkę funkcji dwóch zmiennych

Wzór Taylora

Jeżeli funkcja $f : R^n \supset Ot(\mathbf{a}, \delta) \ni \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) \in R$ ma ciągle pochodne cząstkowe do rzędu m w $Ot(\mathbf{a}, \delta)$, to istnieje $\theta \in (0, 1)$ takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in Ot(\mathbf{a}, \delta)$ prawdziwy jest wzór

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!} df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1} f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) + r_m$$

$$\text{gdzie } r_m = \frac{1}{m!} d^m f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Uwaga: punkt „pośredni” $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ leży wewnątrz odcinka o końcach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{x}$

Dow. Parametryzujemy odcinek $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})$; $t \in [0,1]$ i tworzymy funkcję jednej zmiennej

$\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$. Mamy więc rzeczywistą funkcję φ określoną na domkniętym odcinku $[0,1]$ spełniającą założenia twierdzenia Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Stosując do niej wzór

$$\text{Maclaurina otrzymujemy } \varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}(1-0) + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}1^{m-1} + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta)1^m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}d\varphi(0,1) + \dots + \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1}\varphi(0,1) + \frac{1}{m!}d^m\varphi(\theta,1)$$

$$\text{Ale } d^k \varphi(t_0, t) = \varphi^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = d^k f(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0))(t - t_0)^k.$$

Stąd $d^k \varphi(0,1) = d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a})$ itd.

Szczególny przypadek $m = 2$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right] \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} [x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$

Przykład. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x,y)=e^x \sin y$ w punkcie (0,0) (wzór Maclaurina) dla $m=4$.

$$\text{Odp. } e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + r_4$$

Zastosowanie różniczkii w teorii błędów

Dana jest funkcja f wielu zmiennych. Wektorowy argument funkcji nie jest znany lecz dysponujemy jego pomiarem $\mathbf{x}$ obarczonym błędem Niech $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ oznacza prawdziwą nieznaną wartość argumentu a błąd bezwzględny pomiaru (wektorowego) nie przekracza $\mathbf{b}$ ($\Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ nierówność wektorowa).

$$\text{Wówczas } |f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \approx |df(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| b_i.$$

Wytlumaczenie przybliżonego charakteru wzoru , kiedy to przybliżenie jest „dobre” i jak postąpić gdy przybliżenia nie jest zadowalające.

Przykład. Oszacować metodą różniczkii zupełnej błąd jaki popełniamy obliczając objętość prostopadłościanu o krawędziach 4.1, 3.2, 8.4 zmierzonych odpowiednio z dokładnością 0.1, 0.1, 0.2. Odp. (błąd bezwzględny ≤ 8.756)

Funkcje uwikłane

Przykład Rozważmy równanie $f(x, y) = 0$ np. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ i niech (a, b) spełnia $f(x, y) = 0$, czyli $f(a, b) = 0$

Pytanie: Czy dla dowolnego $x \in [-1, 1]$ istnieje taki $y(x)$, że $f(x, y(x)) = 0$ i $y(a) = b$?

Niech $(a, b) = (0, 1)$. Wówczas funkcja $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $-1 \leq x \leq 1$ spełnia powyższe warunki. Ale spełnia

je także funkcja $y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & x \in [-1, 1] \cap Q \\ -\sqrt{1 - x^2} & x \in [-1, 1] \cap (R - Q) \end{cases}$. Dokładając warunek ciągłości funkcji $y(x)$

eliminujemy ten przypadek.

Jeżeli $(a, b) = (1, 0)$, to nie istnieje funkcja $y(x)$ będąca rozwiązaniem problemu, ale istnieje funkcja $x(y)$ spełniająca warunki zadania.

Powód. W punkcie $(1, 0)$ nie istnieje styczna $Ax + By + C = 0$ dająca się rozwikłać ze względu na y ale daje się rozwikłać ze względu na x .

Twierdzenie o funkcji uwikłanej Jeżeli

- funkcja $f(x, y)$ ma ciągle pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0)
- $f(x_0, y_0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

to

1. dla każdej dostatecznie małej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że każdej wartości x z przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ równania $f(x, y) = 0$ należące do przedziału $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$
2. funkcja $y(x)$ jest ciągła w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i ma w nim ciągłą pochodną wyrażoną wzorem

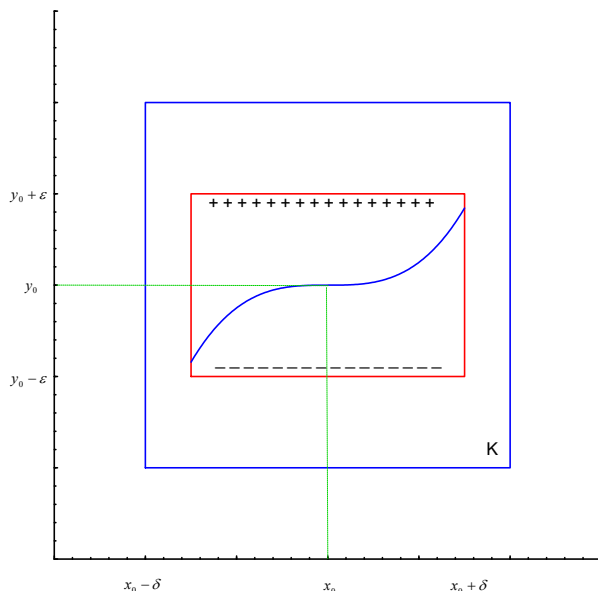
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \text{ gdzie } y = y(x)$$

Dowód (szkic) Bez straty ogólności załóżmy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ (w przeciwnym przypadku można zastąpić równanie $f(x, y) = 0$ równoważnym równaniem: $-f(x, y) = 0$). Z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ wnioskujemy, że istnieje kwadrat

$K = \{(x, y) : |x - x_0| < \eta, |y - y_0| < \eta\}$ w którym $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$. Niech $\varepsilon < \eta$. Pochodna

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) > 0$ funkcji jednej zmiennej $f(x_0, y)$ jest dodatnia, więc w przedziale $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, funkcja $f(x_0, y)$ jest rosnąca. Skoro $f(x_0, y_0) = 0$, to $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ a $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$

(rysunek). Funkcje $f(x, y_0 - \varepsilon)$ i $f(x, y_0 + \varepsilon)$ są ciągłe w punkcie x_0 istnieją więc otoczenie $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ w którym obie zachowują ten sam znak co w punkcie x_0 . Mamy więc $f(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ i $f(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Niech $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ciągła i rosnąca funkcja $f(x_1, y)$ przybiera na końcach przedziału $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ wartości różnych znaków, więc istnieje dokładnie jeden punkt $y(x_1)$ taki, że $f(x_1, y(x_1)) = 0$, co kończy dowód istnienia funkcji uwikłanej $y(x)$. Prosty dowód ciągłości i różniczkowalności funkcji $y(x)$ można znaleźć (Leja F. Rachunek różniczkowy i całkowy)



Przykład. Wykorzystując wzór Taylora znajdź przybliżenie funkcji uwikłanej $y = y(x)$ wielomianem stopnia trzeciego w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Funkcja uwikłana zadana jest równaniem $\cos(xy) - x - 2y = 0$.

W otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1, 0)$ są spełnione założenia tw. o funkcji uwikłanej więc równanie $\cos(xy) - x - 2y = 0$ określa w tym otoczeniu funkcję $y = y(x)$, przy czym $y(1) = 0$.

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + r_4$$

Kolejne pochodne funkcji $y(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ wyliczamy różniczkując równanie 1

$$(1) \quad \cos[xy(x)] - x - 2y(x) = 0,$$

i otrzymujemy

$$(2) \quad -\sin[xy(x)][y(x) + xy'(x)] - 1 - 2y'(x) = 0,$$

a stąd dla $x = 1$ uwzględniając że $y(1) = 0$ otrzymujemy $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

Różniczkując równanie 2 otrzymujemy

$$(3) \quad -\cos[xy(x)][y(x) + xy'(x)]^2 - \sin[xy(x)][2y'(x) + xy''(x)] - 2y''(x) = 0$$

a stąd dla $x = 1$ uwzględniając że $y(1) = 0$ i $y'(1) = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy $y''(1) = -\frac{1}{8}$.

Różniczkując równanie 3 otrzymujemy

$$(4) \quad \sin[xy(x)][y(x) + xy'(x)]^3 - 3 \cos[xy(x)][y(x) + xy'(x)][2y'(x) + xy''(x)] - \sin[xy(x)][3y''(x) + xy'''(x)] - 2y'''(x) = 0,$$

a stąd dla $x = 1$ uwzględniając że $y(1) = 0$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$, $y''(1) = -\frac{1}{8}$ otrzymujemy $y'''(1) = -\frac{27}{32}$

Ostatecznie $y(x) = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{9}{64}(x-1)^3 + r_4$

Ekstrema lokalne funkcji rzeczywistych

Def. Funkcja $f : X \supset D \rightarrow R$ ($a \in D$ - otwarty, X - przestrzeń metryczna) ma w punkcie a

- minimum lokalne $\Leftrightarrow \exists_{O(a) \subset D} \forall_{x \in O(a)} f(x) \geq f(a)$
- minimum lokalne właściwe $\Leftrightarrow \exists_{O(a) \subset D} \forall_{x \in O(a), x \neq a} f(x) > f(a)$.

Def. Funkcja $f : X \supset D \rightarrow R$ ($a \in D$ - otwarty, X - przestrzeń metryczna) ma w punkcie a

- maksimum lokalne $\Leftrightarrow \exists_{O(a) \subset D} \forall_{x \in O(a)} f(x) \leq f(a)$
- minimum lokalne właściwe $\Leftrightarrow \exists_{O(a) \subset D} \forall_{x \in O(a), x \neq a} f(x) < f(a)$.

Tw. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja $f : X \supset D \rightarrow R$ ma w punkcie $a \in D$ ekstremum lokalne i istnieje w punkcie a

pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ($i = 1, \dots, n$), to $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ dla $i = 1, \dots, n$.

Dowód. dla minimum $\frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \begin{cases} > 0 & \text{dla } t > 0 \\ < 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$ i $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ istnieje. Stąd $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Tw. (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli $f : R^n \supset D \rightarrow R$ $x \rightarrow f(x) \in R$

- jest klasy C_D^2 (tzn. ma drugie pochodne cząstkowe ciągłe w D)
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = 1, \dots, n$
- $d^2 f(a, \Delta x) > 0$ (< 0), $\forall \Delta x \neq 0$

to f ma w punkcie a minimum (maksimum) lokalne właściwe

Dowód. Z wzoru Taylora dokładnie jak dla funkcji jednej zmiennej mamy

$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} d^2 f(a + \theta(x-a), x-a) > 0 \quad \forall \Delta x \neq 0$, gdy $d^2 f(a, \Delta x) > 0$, gdyż z ciągłości pochodnych rzędu drugiego, dla ustalonych przyrostów druga różniczka jest funkcją ciągłą w a , więc z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku $d^2 f(a, x - x^0)$ i $d^2 f(a + \theta(x-a), x-a)$ mają ten sam znak dla $\forall \Delta x \neq 0$

Uzupełnienia z algebry

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem R liczb rzeczywistych. **Formą dwuliniową** nad V nazywamy funkcję $Q: V \times V \rightarrow R$ spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= Q(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + Q(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) & Q(\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \lambda Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) & Q(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{w}) &= \lambda Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i dowolnej liczby rzeczywistej λ .

Niech $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ będzie bazą przestrzeni V . Niech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ oznaczają współrzędne

wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ w bazie B tzn. $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$ i $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j$.

Wówczas $Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^n Q(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, czyli wartość formy dwuliniowej dla dowolnej pary wektorów jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości na parach wektorów bazowych $a_{ij} = Q(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$; $i, j=1, \dots, n$, które tworzą **symetryczną** ($a_{ij} = a_{ji}$) **macierz kwadratową**

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przy ustalonej bazie B przestrzeni V możemy traktować formę dwuliniową jako funkcję $Q: R^n \times R^n \rightarrow R$ określoną w przestrzeni współrzędnych wzorem

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

który można także zapisać jako

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \text{ lub } Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza klasyczny iloczyn skalarny w R^n .

Przyjmując w szczególności $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ otrzymujemy z formy dwuliniowej tzw. **formę kwadratową** n zmiennych rzeczywistych $x_1, \dots, x_n$, czyli funkcję

$$\varphi: R^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \text{ przy czym } a_{ij} = a_{ji}$$

Oczywiście forma kwadratowa ma przy ustalonej bazie przestrzeni V dokładnie jedną

reprezentację macierzową $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \langle \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną.

Przykład. Forma kwadratowa 3 zmiennych

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Formę kwadratową φ nazywamy

- nieujemną - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n \quad \varphi(\mathbf{x}) \geq 0$
- niedodatnią - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n \quad \varphi(\mathbf{x}) \leq 0$
- dodatnią - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \varphi(\mathbf{x}) > 0$
- ujemną - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \varphi(\mathbf{x}) < 0$
- dodatnio określoną - gdy $\exists c > 0 \forall \mathbf{x} \in R^n : \varphi(\mathbf{x}) \geq c \|\mathbf{x}\|^2$
- ujemnie określoną - gdy $\exists c > 0 \forall \mathbf{x} \in R^n : \varphi(\mathbf{x}) \leq -c \|\mathbf{x}\|^2$
- nieokreśloną - gdy $\exists \mathbf{x} \in R^n \varphi(\mathbf{x}) > 0$ i $\exists \mathbf{y} \in R^n \varphi(\mathbf{y}) < 0$

Uwaga. W przypadku definiowania form kwadratowych na nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej unormowanej należy odróżniać pojęcia.

dodatniość formy i dodatnia określoność formy
ujemność formy i ujemna określoność formy

W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych pojęcia te pokrywają się. Jest to konsekwencją zwartości sfery jednostkowej w przestrzeni skończenie wymiarowej.

Def. Minorami wiodącymi (odpowiednich stopni) macierzy $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ nazywamy

następujące wyznaczniki $D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Twierdzenie. (kryterium Sylwestera).

Forma kwadratowa $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ jest dodatnia (dodatnio określona) $\Leftrightarrow D_i > 0 \quad i=1, \dots, n.$

Forma kwadratowa $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ jest ujemna (ujemnie określona) $\Leftrightarrow (-1)^i D_i > 0 \quad i=1, \dots, n.$

Jeżeli wszystkie minory wiodące D_i są różne od 0 i zmieniają się inaczej niż w powyższych przypadkach, to forma jest nieokreślona.