CAŁKI PODWÓJNE I POTRÓJNE

Niech $\mathbf{r}:[\alpha,\beta]\ni t\to\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\in R^2$ będzie ciągłą funkcją wektorową.

Def. Zbiór $K=\{\mathbf{r}(t):t\in[\alpha,\beta]\}$ nazywamy **krzywą płaską**, a funkcję **r** nazywamy parametryzacją krzywej płaskiej. (inaczej -**krzywa, to ciągły obraz odcinka**)

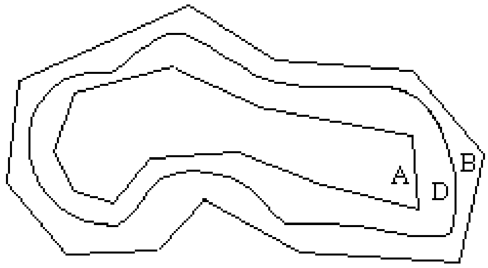
Jeśli dodatkowo założymy, że **r** jest różnowartościowa, to K nazywamy **łukiem zwykłym**.
Jeśli parametryzacja **r** jest **różniczkowalna w sposób ciągły** (czyli $x(t),y(t)\in C^1_{[\alpha,\beta]}$) oraz $\forall t\in[\alpha,\beta]\ \ \mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$, to K nazywamy **łukiem gładkim**.

Def. **Łuk regularny**, to łuk zwykły i gładki.
Krzywa regularna, to krzywa dająca się podzielić na skończoną ilość łuków regularnych.
Krzywa zamknięta, to krzywa, dla której $\mathbf{r}(\alpha)=\mathbf{r}(\beta)$.

Def. **Obszar płaski** $D\in R^2$, to **otwarty** i **spójny** podzbiór płaszczyzny.
Brzeg obszaru, to zbiór jego punktów skupienia nie należących do obszaru.
Obszar domknięty, to obszar z brzegiem.
Obszar wielokątny, to obszar ograniczony skończoną liczbą łamanych.
Pole obszaru wielokątnego – intuicja (suma pól trójkątów na które można podzielić wielokąt)

Pole (miara Jordana) obszaru płaskiego

D – obszar **domknięty** i **ograniczony**
A – wielokąt zawarty w obszarze ($A\subset D$)
B – wielokąt nakrywający obszar ($B\supset D$)
$|A|$ – pole wielokąta A
$|B|$ – pole wielokąta B
$|A|\le|B|$



Istnieją więc kresy: $|D_*|=\sup\limits_{A\subset D,\,A\text{ wielokąi}}|A|$ i $|D^*|=\inf\limits_{B\supset D:B\text{ wielokąt}}|B|$

Def. Jeżeli $|D_*|=|D^*|$, to obszar D nazywamy mierzalnym w sensie Jordana, a $|D|=|D_*|=|D^*|$ nazywamy jego miarą Jordana, czyli polem.

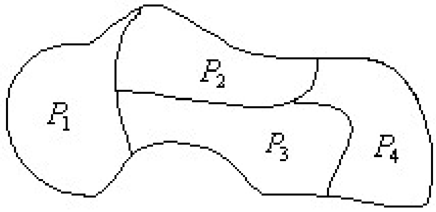
Dowodzi się, że prawdziwe są następujące warunki

Tw.(WKW mierzalności) Obszar płaski i ograniczony jest mierzalny w sensie Jordana $\Leftrightarrow$ brzeg da się pokryć wielokątami o dowolnie małym (sumarycznym) polu. Inaczej, brzeg musi być zawarty w wielokącie o dowolnie małym polu.
Tw.(WW mierzalności). Jeżeli obszar D jest ograniczony i jego brzeg jest sumą skończonej ilości krzywych ciągłych postaci $y=f(x)$ lub $x=g(y)$, to D jest mierzalny w sensie Jordana.
Tw.(WW mierzalności).Jeżeli obszar D jest ograniczony skończoną liczbą zamkniętych krzywych regularnych, to jest mierzalny w sensie Jordana.

Całka podwójna

Niech: $D \in R^2$ będzie **płaskim ograniczonym obszarem domkniętym o brzegu będącym krzywą zamkniętą o polu zero** (czyli można ją nakryć wielokątem o dowolnie małym polu)

Dzielimy obszar D skończoną ilością krzywych o polu zero na obszary $P_1,...,P_n$ o rozłącznych wnętrzach uzyskując podział $\mathsf{P} = \{P_1,....,P_n\}$ $D = P_1 \cup ... \cup P_n$
$i \neq j \Rightarrow \operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j = \varnothing$



Przez $|P_i|$ oznaczać będziemy pole obszaru P_i.

Średnicą zbioru $A \subset X$ (X-przestrzeń unormowana) nazywamy: $d(A) = \sup\limits_{x,y\in A} \|x - y\| = \sup\limits_{x,y\in A} \rho(x, y)$.

Średnicą podziału P nazywamy liczbę $d(\mathsf{P}) = \max\limits_{1\le i\le n} d(P_i)$.

Niech $f : R^2 \supset D \to R^2$.Wybierając w każdym zbiorze P_i punkt $(\xi_i, \eta_i) \in P_i$ tworzymy sumę

$$\sigma\left(f, \mathsf{P}, (\xi_i, \eta_i)_{\,i=1,...,n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |P_i|.$$

Def. Liczbę rzeczywistą I nazywamy całką podwójną funkcji f po obszarze D gdy

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{\mathsf{P}} \forall_{(\xi_i,\eta_i)_{i=1,...,n}}\ d(\mathsf{P}) \le \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) |P_i| - I \right| \le \varepsilon$ i oznaczamy

$$I \overset{df}{=} \iint_D f(x, y) dP = \iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{d(\mathsf{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |P_i|$$

Def. (typu Heinego) Liczbę rzeczywistą I nazywamy całką podwójną funkcji f po obszarze D jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów P_n ciąg odpowiadających sum całkowych σ_n zbiega do I niezależnie od wyboru punktów „pośrednich".

Podobnie jak w przypadku pojedynczej całki Riemanna można zdefiniować sumy Darboux górną $S(f, \mathsf{P})$ i dolną $s(f, \mathsf{P})$ oraz ich kresy – całki górną i dolną. Pojęcia te pozwalają łatwo wykazać następujące warunki całkowalności:

WKW *f* jest całkowalna na *D*⇔∀ε>0 ∃ P: $S(f, \mathsf{P}) - s(f, \mathsf{P}) \le \varepsilon$

WK Jeżeli funkcja określona na ograniczonym obszarze jest całkowalna, to jest ograniczona.

WW Jeżeli funkcja jest ciągła w *D*, to jest całkowalna.

WW Jeżeli funkcja jest ograniczona na *D* i ma nieciągłości na skończonej liczbie krzywych o polu zero, to funkcja ta jest całkowalna na *D*.

Własności całki

1. Jeżeli funkcja jest całkowalna na D i zmienimy ją dowolnie z zachowaniem ograniczoności wzdłuż krzywej o polu równym zero, to otrzymana funkcja jest także całkowalna i całki obu funkcji są równe.

2. Jeżeli obszar D podzielmy krzywą o polu zero na obszary D_1 i D_2, to funkcja jest całkowalna na $D\Leftrightarrow$funkcja ta jest całkowalna na D_1 i D_2 oraz
$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.
3. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na D i $k\in R$, to funkcja (kf) też jest całkowalna na D i
$\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.
4. Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na D, to $f+g$ też jest całkowalna na D i
$\iint\limits_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.
5. Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na D, i $f(x,y)\le g(x,y)$ na D, to wówczas
$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.
6. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na D, to $|f|$ też jest całkowalna na D i
$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$.
7. Jeżeli funkcja f jest całkowalna na D, i $m\le f(x,y)\le M$, to $m|D| \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M|D|$,
czyli istnieje $\mu = \frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ - wartość średnia funkcji f na zbiorze D.
8. Jeżeli funkcja f jest ciągła na D (**zwartym i spójnym**), to $\exists_{\xi^*,\eta^*} : \mu = f(\xi^*,\eta^*)$ - czyli istnieje punkt, w którym f przyjmuje wartość średnią, czyli $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi^*,\eta^*)|D|$.

OBLICZANIE CAŁEK PODWÓJNYCH

Tw.(o zamianie całki podwójnej na iterowaną – wariant dla prostokąta) Jeżeli

- $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ jest całkowalna oraz
- $\forall_{x\in[a,b]}$ istnieje $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$,

to funkcja $I(x)\in R([a,b])$ i $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$ (całka iterowana - całka z całki).

Dowód. Z założonej całkowalności funkcji f na prostokącie P wynika, że możemy podzielić prostokąt P na nm prostokątów dzieląc przedział $[a,b]$ na n przedziałów a przedział $[c,d]$ na m przedziałów tak, aby sumy górna i dolna różniły się dowolnie mało. Wówczas dla dowolnego $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ mamy $I(\xi_i)=\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy = \sum\limits_{j=1}^m \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)dy$. Z twierdzenia o wartości średniej dla całki Riemanna mamy

$m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)dy \le M_{ij}\Delta y_j$, j=1,...,m. Wobec tego $\sum\limits_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j \le I(\xi_i) \le \sum\limits_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j$.

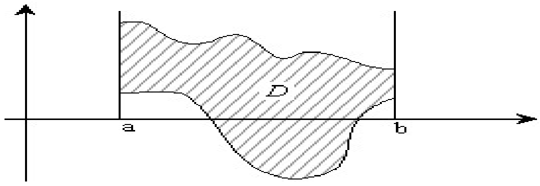
Mnożąc każdą z tych nierówności przez Δx_i i sumując po i otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n}[\int_c^d f(\xi_i, y)dy]\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j .$$

Gdy średnica podziału zmierza do 0, to skrajne sumy zmierzają do $\iint_P f(x,y)dxdy$ a środkowa do $\int_a^b[\int_c^d f(x,y)dy]dx$

Uogólnienie

Niech $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ \varphi,\psi -$ ciągłe$\}$ będzie **trapezem krzywoliniowym**



Def. **Obszar normalny** względem osi *OX*, to obszar, którego rzut na oś *OX* jest przedziałem $[a,b]$ i każdy przekrój prostą $x=x_0$, $x_0 \in [a,b]$ jest przedziałem $[\varphi(x), \psi(x)]$

Tw.(w wersji dla obszaru normalnego) Jeżeli

- $f : D \to R$ jest całkowalna na *D* oraz
- $\forall_{x\in[a,b]}$ istnieje $I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$,

to funkcja $I(x) \in R([a,b])$ i $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right]dx$.

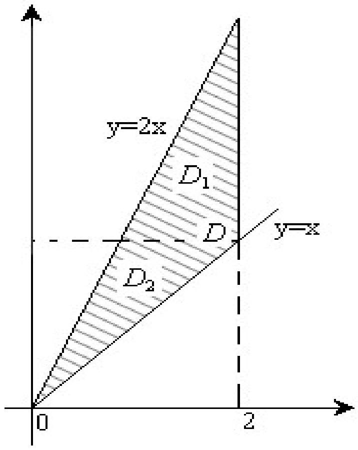
Dow. Obszar *D* można nakryć prostokątem *P* (bo *D* – ograniczony) $P \supset D$

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in P\setminus D \end{cases}$$

$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_P f^*(x,y)dxdy ...$, (bo można podzielić obszar *P* na 3 obszary, przy czym w dwóch z nich funkcja f^* jest zerem i stosujemy poprzednie twierdzenie:

$$\cdots = \int_a^b \left[\int_c^{\varphi(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\psi(x)}^{d} f^*(x,y)dy\right]dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

Przykład. Zmienić kolejność całkowania



$$\int_0^2\left[\int_x^{2x} f(x,y)dy\right]dx = \iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \ldots$$

$$y = x \to x = y$$

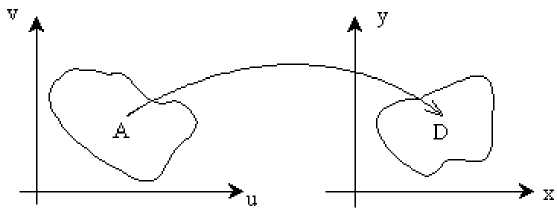
$$y = 2x \to x = \tfrac{1}{2}y$$

$$= \ldots\int_0^2\left[\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx\right]dy + \int_2^4\left[\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx\right]dy$$

Jeżeli obszar nie jest normalny, to dzielimy go na skończoną liczbę obszarów normalnych i dodajemy całki.

Zmiana zmiennych w całce podwójnej

Funkcja wektorowa: $T := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \Delta$ – otwarty, spójny.



Załóżmy, że T jest różniczkowalna w Δ (czyli istnieją ciągłe pochodne cząstkowe w Δ)

jakobian: $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \stackrel{df}{=} \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \neq 0$ w Δ.

Przy powyższych założeniach można dowieść, że ***T* przekształca obszar na obszar i łuk zwykły na łuk zwykły.**

Niech Δ, D będą domkniętymi **obszarami regularnymi** (dające się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych).

$T := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ odwzorowuje obszar regularny Δ na obszar regularny D.

Ponadto $f : D \to R$ - ciągła (więc ograniczona z ograniczoności obszaru)

Tw. Jeżeli 1^o T jest klasy C^1 w obszarze nakrywającym Δ

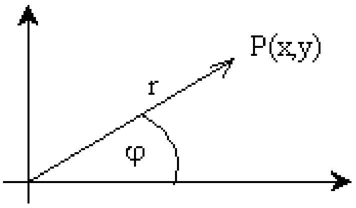
2^o $T : \operatorname{int}\Delta \to D$ jest różnowartościowa (T nie musi być różnowartościowa na brzegu Δ)

3º $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ w $\operatorname{int}\Delta$

4º $f : D \to R$ jest ciągła na D (wiec także ograniczona)

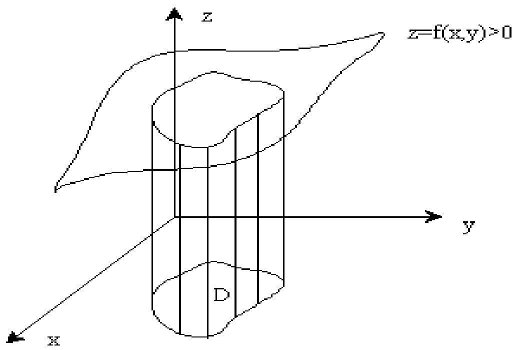
to: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Transformacja biegunowa



$$T_B = \begin{cases} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le \infty \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \qquad (J \neq 0 \text{ dla } r \neq 0)$$



$$V = \{(x,y,z) : x,y \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

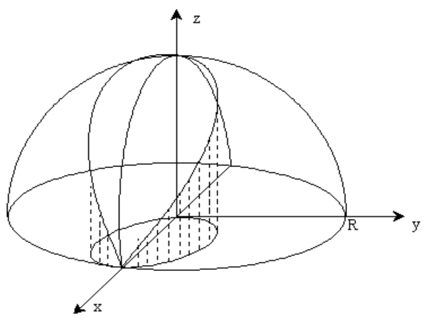
$$|V| = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Przykład Obliczyć objętość bryły wyciętej walcem z kuli

Walec: $x^2 + y^2 = Rx \Leftrightarrow (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = (\frac{R}{2})^2$

Kula: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Bryła Vivaniego:



- górna połówka

$$V = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \right\} = 2 \iint_{\substack{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le R\cos\varphi}} \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr d\varphi = ..$$

$$... = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr \right] d\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\tfrac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R\cos\varphi} \right] d\varphi = \tfrac{2}{3}R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left|\sin^3\varphi\right|\right) d\varphi =$$

$$= \tfrac{4}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^3\varphi\right) d\varphi = \tfrac{2}{9}R^3(3\pi - 4).$$

Jak obliczyć zbieżną całkę niewłaściwą $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{x-m}{\sigma} \\ dx = \sigma du \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$?

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \iint_{R^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \{t = \frac{r^2}{2}\} = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

Stąd $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$; $\forall m\ \forall \sigma > 0$.

Podobnie $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \{t = x^2\} = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

gdyż

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{[0,\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \tfrac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \tfrac{\pi}{4}\int_0^{\infty} e^{-u} du = \tfrac{\pi}{4},$$

a stąd $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Całki potrójne

Miara Jordana -objętość-obszaru przestrzennego) $V \subset R^3$

Podobnie jak dla obszaru płaskiego definiujemy obszar wielościenny – obszar ograniczony skończoną liczba płaszczyzn i powtarzamy poprzednią konstrukcję.

Tw. (WKW mierzalności objętościowej) Obszar przestrzenny $V \subset R^3$ jest mierzalny w sensie Jordana $\Leftrightarrow$ brzeg da się pokryć skończoną ilością wielościanów o dowolnie małej (sumarycznej) objętości.

Tw.(WW mierzalności objętościowej) Jeżeli $V \subset R^3$ jest ograniczony skończoną liczbą powierzchni $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ lub $x = h(y,z)$, $(f, g, h -$ ciągłe określone na zbiorze ograniczonym), to V jest mierzalny.

Tw.(WW mierzalności objętościowej) Jeżeli $V \subset R^3$ jest ograniczony skończoną liczbą powierzchni gładkich o równaniach

$S : \mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$ $(u,v) \in D -$ obszar domknięty i ograniczony i rząd$\left(\mathbf{r}'(u,v)\right) =$ rząd

$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2$, bez punktów wielokrotnych, to V jest mierzalny.

Niech $f : R^3 \supset V \to R$ będzie funkcją określoną na **ograniczonym** obszarze **domkniętym** V **o brzegu miary Jordana 0**, (czyli na obszarze mającym objętość). Podobnie jak w konstrukcji całki podwójnej dzielimy obszar V powierzchniami o objętości 0 na obszary $V_1, ..., V_n$ uzyskując podział P oraz tworzymy analogiczną sumę całkową:

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \gamma_i) |V_i|$ i jej granicę o ile istnieje

w uproszczeniu: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{dP \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$

WK i WW całkowalności oraz własności całki potrójnej są analogiczne do przypadku całki podwójnej (zastępując: krzywa – powierzchnia, zbiór płaski – zb. przestrzenny)

Zamiana całki potrójnej na iterowaną

Tw: (wersja A dla prostopadłościanu $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$) . Jeżeli

- $f : V \to R$ jest całkowalna na V
- $\forall_{x \in [a,b]}$ $I(x) = \iint\limits_{[c,d] \times [e,f]} f(x,y,z)dydz$ istnieje,

to $I(x) \in R([a,b])$ i $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\iint\limits_{[c,d] \times [e,f]} f(x,y,z)dydz \right] dx$.

Tw. (wersja B dla prostopadłościanu $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$)). Jeżeli

- $f : V \to R$ jest całkowalna na V
- $\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ $I(x,y) = \int_e^f f(x,y,z)dz$ istnieje,

to $I(x,y)$ jest całkowalna na $[a,b] \times [c,d]$ i $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{[a,b] \times [c,d]} \left[\int_e^f f(x,y,z)dz \right] dxdy$.

Uogólnienie powyższych twierdzeń.

V – obszar jak w definicji całki potrójnej (ograniczony powierzchniami o mierze 0)
T – prostopadłościan nakrywający V ($V \subset T$)

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & dla\ (x,y,z) \in V \\ 0 & dla\ (x,y,z) \in T \setminus V \end{cases}$$

Z własności całki otrzymujemy równość $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f^*(x,y,z)dxdydz$.

Oznaczmy: $P_x = \{(y,z) : (x,y,z) \in V\}$ - przekrój obszaru płaszczyzną prostopadłą do osi X.

Tw. (wersja A dla obszaru zawartego miedzy płaszczyznami $x = a$ i $x = b$). Jeżeli

- $f : V \to R$ jest całkowalna na V
- $\forall_{x\in[a,b]}\ I(x) = \iint\limits_{P_x} f(x,y,z)dydz$ istnieje, to $I(x) \in R([a,b])$ i

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\iint\limits_{P_x} f(x,y,z)dydz \right] dx.$$

$D = \{(x,y) : \exists_z : (x,y,z) \in V\}$ - rzut obszaru przestrzennego V na płaszczyznę XY.
$P_{(x,y)} = \{z : (x,y,z) \in V\}$ - przekrój obszaru V prostą równoległa do osi Z wystawioną w punkcie (x,y)

Tw. (wersja B dla ogólnego obszaru). Jeżeli

- $f : V \to R$ jest całkowalna na V
- $\forall_{(x,y)\in D}\ I(x,y) = \int\limits_{P_{(x,y)}} f(x,y,z)dz$ istnieje,

to $I(x,y)$ jest całkowalna na D i $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{P_{(x,y)}} f(x,y,z)dz \right] dxdy$.

Np. $V : \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \\ A(x,y) \le z \le B(x,y) \end{cases}$ $\quad \varphi, \psi, A, B$ – ciągłe

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx$$

Zamiana zmiennych w całce potrójnej

Tw. Jeżeli

1° transformacja $T = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ jest klasy C^1 w obszarze obejmującym Ω

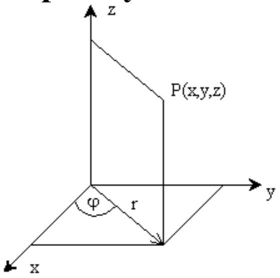
2° $T : \operatorname{int}\Omega \to V$ jest różnowartościowa (T nie musi być różnowartościowa na brzegu Ω)

$$3^\circ \quad J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0 \text{ w } \operatorname{int}\Omega$$

4° $f: V \to R$ - ciągła (więc ograniczona)

to $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$

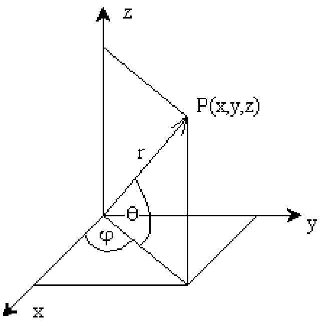
Współrzędne walcowe i sferyczne



(r,φ,z) - współrzędne walcowe

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

$J=r$



(r,φ,θ) - współrzędne sferyczne

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi & 0\le r<\infty\\ y=r\cos\theta\sin\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi\\ z=r\sin\theta & -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$J=r^2\cos\theta$

Zastosowania całek

- Objętość obszaru $|V|=\iiint\limits_V dxdydz$
- Masa bryły o gęstości $\rho(x,y,z)$ $\quad m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$
- Momenty statyczne i współrzędne środka masy

  np. $MS_{xy}=\iiint\limits_V z\,\rho(x,y,z)dxdydz$, $z_C=\frac{MS_{xy}}{m}$ itd.
- Momenty bezwładności np. $I_x=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)dxdydz$
- i wiele innych