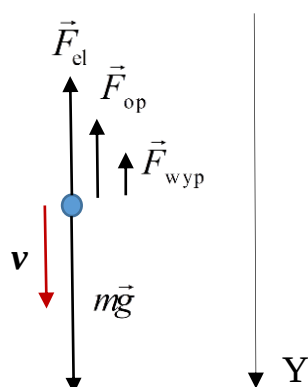


Doświadczenie Millikana – opis

Mała kropla oleju o masie m , naładowana ładunkiem elektrycznym q porusza się w powietrzu w jednorodnym polu elektrostatycznym o wektorze E równoległym do wektora przyspieszenia ziemskiego g .



$\vec{v}$ - prędkość kropli (zaznaczona kolorem czerwonym),

$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ - siła elektrostatyczna działająca na kroplę o ładunku q ,

$\vec{F}_{op} = -K\vec{v}$ - siła oporu Stokes'a, gdzie $K = 3\pi\eta d$, d – średnica kropli, η - współczynnik lepkości powietrza,

$\vec{F}_{wyp}$ - siła wyporu działająca na kroplę.

(1)

II Zasada Dynamiki Newtona dla tej kropli ma postać

$$m\dot{\vec{v}}(t) = m\vec{g} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{op} + \vec{F}_{wyp}. \quad (2)$$

Po podstawieniu (1) do (2) i zaniedbaniu siły wyporu, otrzymujemy dla współrzędnej $v_y(t)$ równanie różniczkowe

$$\dot{v}_y(t) = -\frac{K}{m}v_y(t) + \frac{q}{m}E_y + g. \quad (3)$$

Zauważmy, że jednostką współczynnika K/m jest s^{-1} , a zatem można wprowadzić pewien czas charakterystyczny dla ruchu kropli

$$\tau = \frac{m}{K} = \frac{\rho d^2}{18\eta}, \quad (4)$$

gdzie ρ oznacza gęstość oleju. Zależy on od kropli poprzez jej średnicę i gęstość oraz od współczynnika lepkości powietrza. Zauważmy, że po czasie dostatecznie długim (na razie nie określamy jak długim) kropla będzie się poruszać z pewną stałą, graniczną prędkością v_{gr} , którą można łatwo obliczyć z równania (3) przyjmując $\dot{v}_y(t) = 0$, mianowicie

$$v_{gr} = \tau \left(\frac{q}{m}E_y + g \right). \quad (5)$$

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń równanie (3) przyjmuje postać

$$\dot{v}_y(t) = -\frac{1}{\tau}[v_y(t) - v_{gr}]. \quad (6)$$

Równanie to można łatwo rozwiązać wprowadzając nową funkcję $u_y(t) = v_y(t) - v_{gr}$. Otrzymamy wtedy równanie

$$\dot{u}_y(t) = -\frac{u_y(t)}{\tau}, \quad (7)$$

którego ogólnym rozwiązaniem jest $u_y(t) = Ce^{-t/\tau}$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Ogólne rozwiązanie równania (6) to $v_y(t) = Ce^{-t/\tau} + v_{gr}$. Jeśli przyjmiemy, że kropla poruszała się w chwili $t = 0$ z prędkością zerową, to $C = -v_{gr}$ i rozwiązanie równania (6) ma postać

$$v_y(t) = v_{gr}(1 - e^{-t/\tau}). \quad (8)$$

Widać, że dla $t \rightarrow \infty$, czyli praktycznie dla $t \gg \tau$, $v_y(t) \rightarrow v_{gr}$. Należy zadać pytanie, czy w naszym doświadczeniu możemy przyjąć, że kropla oleju przez cały czas wykonywania pomiaru czasu jej przelotu Δt porusza się (praktycznie) ruchem jednostajnym z prędkością graniczną v_{gr} ?

Aby odpowiedzieć musimy określić czas, po upływie którego rozpoczynamy pomiar czasu przelotu kropli. Oznaczmy ten czas przez t_0 i przyjmijmy, że jest to czas przelotu kropli pomiędzy dwiema najbliższymi kreskami podziałki na okularze mikroskopu, które są odległe o $S = 0.05 \text{ mm}$. A zatem, $t_0 = S/v_{gr}$. Następnie, przyjmijmy t_0 za nową jednostkę czasu. Wtedy $x = t/t_0$ jest bezwymiarowym czasem. Pochodna po t daje się łatwo wyrazić przez pochodną po x

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} = \frac{1}{t_0} \frac{d}{dx}. \quad (9)$$

Traktując prędkość $v_y(t)$ jako funkcję zależną od x , $v_y(t) = v_y(t_0 x) = w(x)$, dostajemy

$$\dot{v}_y(t) \equiv \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{1}{t_0} \frac{dw(x)}{dx}, \quad (10)$$

gdzie $w(x)$ jest prędkością mierzoną w czasie bezwymiarowym. Po podstawieniu (10) do (6) i po obustronnym pomnożeniu otrzymanego równania przez τ otrzymujemy

$$\frac{\tau}{t_0} \frac{dw(x)}{dx} = -[w(x) - v_{gr}]. \quad (11)$$

Odpowiedź na postawione pytanie zależy od ilorazu τ/t_0 (nosi nazwę liczby Stokesa (w skrócie St). Jeżeli $St \ll 1$, wtedy można przyjąć, że lewa strona równania (11) jest równa zeru i wtedy dostajemy $w(x) = v_y(t) = v_{gr}$.

Obliczenie ładunku q kropli

Ze wzoru (5) obliczamy ładunek kropli

$$q = \frac{m}{E_y} \left(\frac{v_{gr}}{\tau} - g \right), \quad (12)$$

Zatem, musimy najpierw obliczyć:

- masę kropli $m = \pi \rho d^3 / 6$ – z pomiaru średnicy kropli d i znanej gęstości oleju ρ ,
- natężenie pola elektrostatycznego w kondensatorze $|E_y| = U/h$ – znając napięcie $U > 0$ oraz odległość między okładkami h ,
- prędkość graniczną v_{gr} – z pomiaru czasu lotu kropli i przebytej przez nią drogi,
- czas charakterystyczny $\tau = \rho d^2 / 18 \eta$ – trzeba znać współczynnik lepkości powietrza η przy ciśnieniu atmosferycznym w danej temperaturze.

Średnicę kropli wyznaczamy z pomiaru jej prędkości granicznej, gdy napięcie na kondensatorze wynosi zero. Wówczas kropla opada z prędkością graniczną, którą obliczamy ze wzoru (5)

$$v_{gr} = \tau g = \frac{\rho g}{18\eta} d^2, \quad (13)$$

a stąd

$$d = \sqrt{\frac{18\eta}{\rho g} v_{gr}}. \quad (14)$$

Oszacowanie wartości: τ , t_0 , St i prędkości granicznej v_{gr} przy wyłączonym i włączonym napięciu między okładkami kondensatora.

Jeżeli przyjmiemy następujące wartości parametrów:

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$d = 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$q = -3e,$$

$$U = 10^3 \text{ V}$$

$$h = 1 \text{ cm}$$

$$S = 0.05 \text{ mm}$$

to otrzymamy:

$$m \approx 5 \cdot 10^{-16} \text{ kg}$$

$$\tau \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$v_{gr} \approx 0.03 \text{ mm/s}, \quad t_0 \approx 1.7 \text{ s} \quad \text{i} \quad St \approx 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{- bez napięcia na kondensatorze}$$

$$v_{gr} \approx 0.3 \text{ mm/s}, \quad t_0 \approx 0.17 \text{ s} \quad \text{i} \quad St \approx 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{- z napięciem } 1000 \text{ V na kondensatorze.}$$

Jak widać, w obu przypadkach (z napięciem i bez) $St \ll 1$, czyli kropla porusza się praktycznie ruchem jednostajnym.