

Równania Bernoulliego

Seminarium WFiIS 2003/04/25

Płyn (ciecz lub gaz) - układ o własnościach mechanicznych i termodynamicznych

funkcje i parametry opisujące stan płynu:

$\vec{u}(\vec{r}, t)$ - pole prędkości

$p(\vec{r}, t)$ - ciśnienia

$\rho(\vec{r}, t)$ - gęstości

$T(\vec{r}, t)$ - temperatury

η, ξ - pierwszy i drugi współczynnik lepkości

k - współczynnik przewodnictwa cieplnego

Równania ruchu płynu

1. $\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + (\xi + \eta/3) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \rho \vec{g}$ - r. Naviera-Stokesa
(II z.dyn.Newtona)
d/dt=...
2. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ - r. ciągłości (prawo zachowania masy)
3. $\underbrace{\rho T \frac{ds}{dt}}_{dQ/dt} = \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nabla \cdot \underbrace{(-k \nabla T)}_{\vec{j}_Q}$ - r. transportu ciepła $\sigma_{ik} = \dots$
4. $f(p, \rho, T) = 0$ - równanie stanu

ε, s, h - energia wewn., entropia i entalpia **na jednostkę masy** płynu

$\rho \varepsilon, dQ$ - energia wewnętrzna i ciepło **na jednostkę objętości** płynu



Całki ruchu - prawa zachowania w postaci r. ciągłości:

Pęd (z 1. i 2.):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = \rho g_i \quad (*)$$

ρu_i - gęstość pędu

$\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho u_i u_k - \sigma_{ik}$ - tensor gęstości strumienia pędu

i-ta składowa gęstości pędu przepływającego przez powierzchnię $\perp$ do k-tej osi w jednej sekundzie

Moment pędu $\vec{r} \times (*)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{r} \times \vec{u})_i + \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} = \rho (\vec{r} \times \vec{g})_i$$

$M_{ik} = \epsilon_{ijr} x_j \pi_{rk}$ - tensor gęstości strumienia momentu pędu

Energia

korzystamy z [1, 2, 3](#) i tożsamości termodynamicznych:

$$d\varepsilon = T ds - p d(1/\rho), \quad h = \varepsilon + p/\rho$$

$$\text{oraz} \quad \vec{g} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = -\vec{r} \cdot \vec{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + u^2/2 + \varphi \right) \right] + \nabla \cdot \left[\left(h + u^2/2 + \varphi \right) \rho \vec{u} - k \nabla T - u_i \sigma_{ik} \hat{x}_k \right] = 0$$

aby entalpia w obu członach - dodajemy obustronnie $\partial p / \partial t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho B) + \nabla \cdot (B \rho \vec{u}) = Z$$

gdzie $B = h + u^2/2 + \varphi$ - funkcja Bernoulliego

$$Z = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot [k \nabla T + u_i \sigma_{ik} \hat{x}_k] \quad - \text{ funkcja źródła}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho B) + \nabla \cdot (B \rho \vec{u}) = Z \\ B \cdot / \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \end{array} \right\} (-) \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial B}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla B}_{dB/dt} = \frac{Z}{\rho}$$

Ostatecznie:

równanie na funkcję Bernoulliego $B = h + \frac{u^2}{2} + \varphi$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{Z}{\rho}$$

stąd

$$B(t, \vec{r}(t)) = \int_0^t Z/\rho \, dt$$

- wzdłuż linii prądu
ogólne r. Bernoulliego



Przepływy stacjonarne $\partial B / \partial t = 0$
i izoentropowe (adiabatyczne: $ds/dt = 0$)

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad \text{gdy } \eta = \xi = k = 0$$

wtedy $Z = 0 \Rightarrow 0 = \frac{dB}{dt} = \vec{u} \cdot \nabla B = u \underbrace{\hat{u} \cdot \nabla B}_{\partial B / \partial l} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial l} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{h + \frac{u^2}{2} + \varphi = B_0(\gamma)} \quad - \text{wzdłuż lini prądu } \gamma$$

jawna postać entalpii: $dh = Tds + dp/\rho = dp/\rho$

stąd $h = \int dp/\rho$

$$\boxed{\int dp/\rho + \frac{u^2}{2} + \varphi = B_0(\gamma)}$$

Przykłady

(tyle ile równań stanu i przemian = ∞ wiele)

- płyn nieściśliwy: $h = \int dp/\rho = p/\rho + h_0$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \varphi = B_0(\gamma)$$

- gaz doskonały
 - przemiana adiabatyczna: $p/\rho^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma$,

$$h = \int dp/\rho = c_p T + h_0 \quad \Rightarrow \quad c_p T + \frac{u^2}{2} + \varphi = B_0(\gamma)$$

$$\text{lub inaczej } h = \int dp/\rho = \frac{\gamma}{\gamma-1} (p/\rho - p_0/\rho_0), \quad \text{niech } \varphi = 0$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p/\rho + \frac{u^2}{2} = B_0(\gamma)$$

niech $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ tam gdzie $u = 0$

$$(*) \quad \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p/\rho = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0/\rho_0 \quad - \text{wzdłuż lini prądu}$$

$c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ - prędkość dźwięku, $M = u/c_0$ - liczba Macha

wtedy z (*):

$$p/p_0 = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad - \text{wzdłuż lini prądu}$$

dla $M \ll 1$: $p/p_0 \approx 1 - \gamma M^2/2$ i podobnie

$$\rho/\rho_0 \approx 1 - M^2/2, \quad T/T_0 \approx 1 - (\gamma-1) M^2/2$$

dla $M = 1/2$ poprawki wynoszą ok. 6%



Przepływ stacjonarny nielepki i izotermiczny ($\eta = \xi = 0$, $\nabla T = 0$)

$$\frac{dB}{dt} = \frac{Z}{\rho}$$

$$\text{lecz } Z = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot [k \nabla T + u_i \sigma_{ik} \hat{x}_k] = 0$$

$$\text{wtedy } \frac{dB}{dt} = (\vec{u} \cdot \nabla) B = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial l} = 0$$

$$h + u^2/2 + \varphi = B_0(\gamma) \quad (*)$$

- dla gazu doskonałego: $h = \int dp/\rho = \frac{\ln p}{m\beta} + h_0$, $\beta^{-1} = kT$

(*) $\Rightarrow$

$$p = p_0 \exp[-\beta(mu^2/2 + mgz)]$$

- wzdłuż linii prądu



Jak zmienia się stała **B** przy zmianie lini prądu ?

$$\nabla B = \nabla h + \nabla(u^2/2) + \nabla p/\rho = \dots$$

$$dh = Tds + dp/\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla h = T\nabla s + \nabla p/\rho$$

$$\nabla(u^2/2) = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \underbrace{\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})}_{\vec{\Omega}} = d\vec{u}/dt + \vec{u} \times \vec{\Omega}$$

$$\dots = \underbrace{d\vec{u}/dt + \nabla\phi + \nabla p/\rho}_0 + T\nabla s + \vec{u} \times \vec{\Omega}$$

0 r.Eulera

ostatecznie

$$\nabla B = T\nabla s + \vec{u} \times \vec{\Omega}$$

- równanie Crocco (1937r.)

Gdy entropia jednorodna ($\nabla s = 0$) i $\vec{\Omega} = \vec{0}$

$$\nabla B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \text{const} \quad - \text{ w całym płynie.}$$



Uogólnione r. Bernoulliego

przepływ niestacjonarny i lepki

$$B(t, \vec{r}(t)) = \int_0^t Z/\rho \, dt$$

- można stąd, lecz prościej z r, N-S

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p/\rho + \vec{f}_l + \vec{g} \quad (*)$$

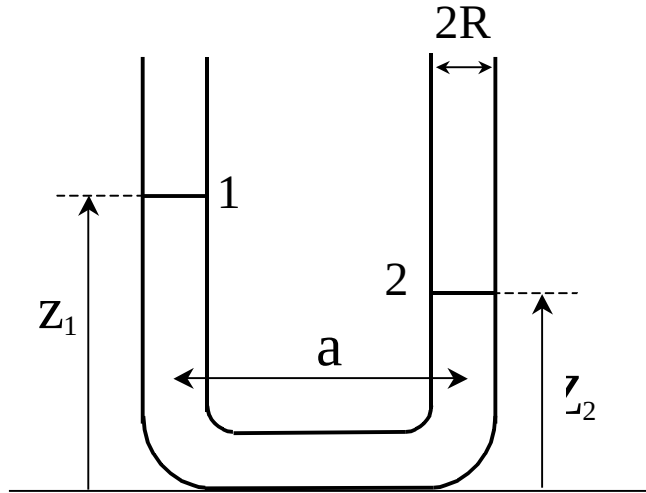
$$\vec{f}_l = \eta \nabla^2 \vec{u} + (\xi + \eta/3) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \quad - \text{siła lepkości}$$

$$\int_{\gamma} (*) d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial u}{\partial t} dl + \int_{l_1}^{l_2} f_l dl + \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 = \frac{u_1^2}{2} + gz_1$$



Przykład (płyn nieściśliwy i nielepki)



$$z_1 + z_2 + a = L$$

$$R \ll a$$

$$u_1 = u_2$$

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_1 = \dot{z}_1 = -\dot{z}_2$$

$$\ddot{z}_1 + \frac{2g}{L} z_1 = g (1 - a/L)$$

gdy uwzględnimy lepkość η ($\xi=0$):

$$\ddot{z}_1 + \frac{8\eta}{\rho R^2} \dot{z}_1 + \frac{2g}{L} z_1 = g (1 - a/L)$$



Relatywistyczne r. Bernoulliego

przepływ izoentropowy:

$$\frac{\varepsilon + p}{n \sqrt{1 - u^2/c^2}} = B_0(\gamma)$$

n - koncentracja cząstek płynu

ε, p, n - liczone w układzie spoczynkowym elementu płynu

Literatura

1. Batchelor G.K. „*An Introduction to Fluid Dynamics*” (Camb. Uni.Press 1967)
2. Landau L.D., Lifszyc E.M. „*Hydrodynamika* ” (PWN, Warszawa 1980)
3. Milne-Thomson L.M. „*Theoretical Hydrodynamics*” (Macmillan & co LTD, London 1960)
4. Sabersky R.H., Acosta A.J., Hauptmann E.G. „*Fluid Flow, a First Course in Fluid Mechanics* ” (Macmillan Publ.Company, NY 1989)
5. Synolakis C.E., Badeer H.S. „*On Combining the Bernoulli and Poiseuille Equation - A plea to authors of college physics texts*”
Am.J.Phys. **57** (1989) 1013
6. Bauman R. „*An alternative derivation of Bernoulli's principle*”
Am. J. Phys. **68** (2000) 288