

Definicje

0

1. **Polem skalarowym** $f(\vec{r})$ nazywamy funkcję

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

2. **Polem wektorowym** $\vec{A}(\vec{r})$ nazywamy funkcję

$$\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{i oznaczamy w zadanej bazie}$$

kartezjańskiej $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ następująco

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{x} A_x(\vec{r}) + \hat{y} A_y(\vec{r}) + \hat{z} A_z(\vec{r}).$$

funkcje $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$ i $A_z(\vec{r})$ nazywamy współrzędnymi pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$ w bazie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że pola skalarne i wektorowe są co najmniej 2-krotnie różniczkowalne.

Przykłady:

Ad 1. $f(\vec{r}) = 3xy + 2 \sin z + e^{xz}$

Ad 2. $\vec{A}(\vec{r}) = \hat{x} \sin y + \hat{y} e^{xz^2} + \hat{z} \frac{1}{x}$

3. **Gradientem pola skalarnego** $f(\vec{r})$ w bazie kartezjańskiej $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ nazywamy pole wektorowe

$$\nabla f(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

Uwaga: Prawdopodobnie można zapisać:

$$\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\vec{r})$$

gdzie operator różniczkowy ujęty w nawias nazywamy operatorem gradientu, we współrzędnych kartezjańskich i oznaczamy symbolem ∇ , czyli operator gradientu we współrzędnych kartezjańskich to

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

4. Laplasjanem pola skalarowego we współtzn. kartez. 9/1
nazywamy pole skalarne oznaczone przez $\nabla^2 f(\vec{r})$

$$\nabla^2 f(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(\vec{r}).$$

Uwaga:

symbol ∇^2 można traktować jako iloczyn skalarny dwóch operatorów gradientu

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

działający na f-gę skalarą (pole skalarne) $f(\vec{r})$.

5. Dywergencja pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$ we współtzn. kartez. nazywamy pole skalarne oznaczone przez $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})$, gdzie

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} A_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} A_z(\vec{r})$$

6. Rotacja pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$ we współtzn. kartez. nazywamy pole wektorowe ozn. przez $\nabla \times \vec{A}(\vec{r})$, gdzie

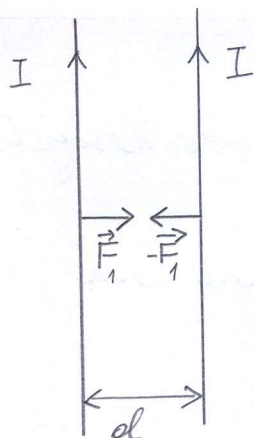
$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial z} A_y(\vec{r}) \right) + \\ &+ \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial x} A_z(\vec{r}) \right) + \\ &+ \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial y} A_x(\vec{r}) \right).\end{aligned}$$

Elektromagnetyzm

①

Definicje:

Rozważmy dwa cienkie i napięte druty równoległe do siebie, przez które płynie jednakowe prądy I w tą samą stronę (zakładamy, że druty są nieskończenie długie)



Z doświadczenia wynika, że druty te przyciągają się - siła na jednostkę długości drutu równa co do wartości

$$F_1 = \frac{F(l)}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d}, \text{ gdzie } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

d - odległość pom. drutami

1 A - oznacza jednostkę prądu 1 amper.

1. Def. ampera (A): Przez drut płynie prąd I o wartości jednego ampera $\stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{F(l)}{l} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ i $d = 1 \text{ m}$.

2. Def. kulomba (C): 1 kulomb to ilość ładunku elektrycznego przepływającego przez przekroj przewodnika z prądem o wartości 1 A w czasie 1 s .

3. Def. wektora pola elektrostatycznego (el-stat)

W przestrzeni znajduje się pole el-stat. $\vec{E}(\vec{r})$ wtedy, gdy na ładunek punktowy q umieszczony w miejscu (wskazanym przez wektor) $\vec{r}$ działa siła

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}).$$

Uwaga: Oznacza to, że $\vec{E}(\vec{r})$ daje się policzyć ze wzoru

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$$

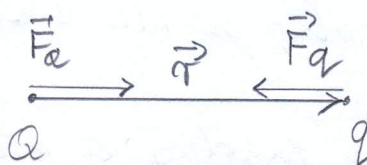
Zwykle za q wybiera się b. małą (co do wartości) ładunek punktowy dodatni.

$$[E] = \frac{N}{C}, \quad [q] = C.$$

Prawo Coulomba

Niech Q i q - ładunki punktowe, np. przeciwnych znaków ($Qq < 0$)

$\vec{F}_q$ i $\vec{F}_Q$ - siły oddziaływania, odpowiednio na ład. q i ład. Q

 wtedy $\vec{F}_q = \frac{kQq}{r^2} \hat{r}$ i $\vec{F}_Q = -\vec{F}_q$

Uwaga: Gdy $Qq > 0$ wtedy także $\vec{F}_q = \frac{kQq}{r^2} \hat{r}$ jeśli wektor $\hat{r}$ wskazuje ład. q !

Pole $\vec{E}(\vec{r})$, którego źródłem jest ładunek p-owy Q

$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q} = \frac{1}{q} \frac{kQq}{r^2} \hat{r} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

Uwaga: Stała $k \approx 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ - jej wartość wynika z przyjętej jednostki ładunku (1C).

zwykle wprowadza się inną stałą

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

zwaną stałą elektryczną próżni.

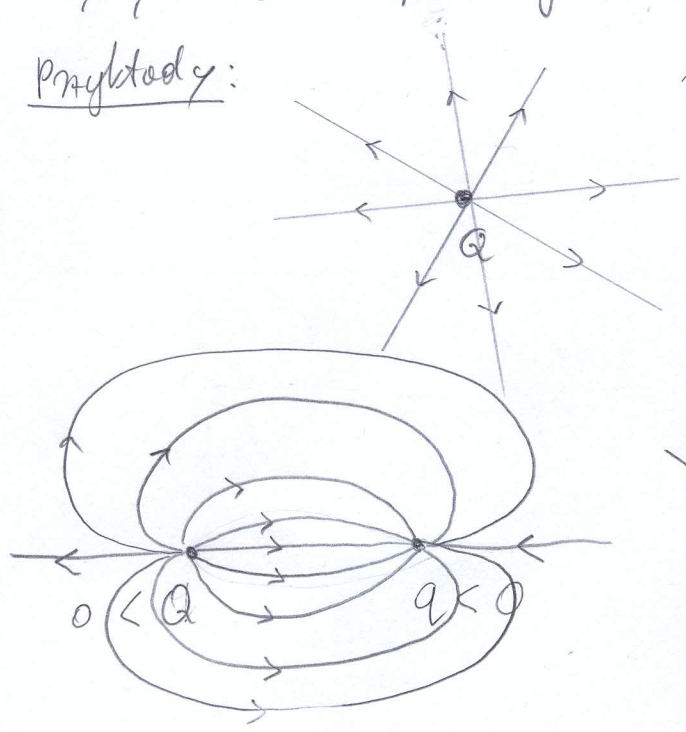
$$\text{czyli } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Mówimy, że pole od ład. p-owego Q jest sferycznie symetryczne, bo podobnie jak sfera, nie zmienia się (prochodki w siebie) przy obrocie wokół dowolnej prostej przechodzącej przez ład. p-owy Q .

Linia pola el-stat. to linia, do której wektor pola el-stat. jest styczny w każdym jej punkcie.

Linie pola el-stat. pochodzącego od ład. p-owego Q (pola sfer-sym.) tworzą pak prostych przecinających się w ład. p-owym Q .

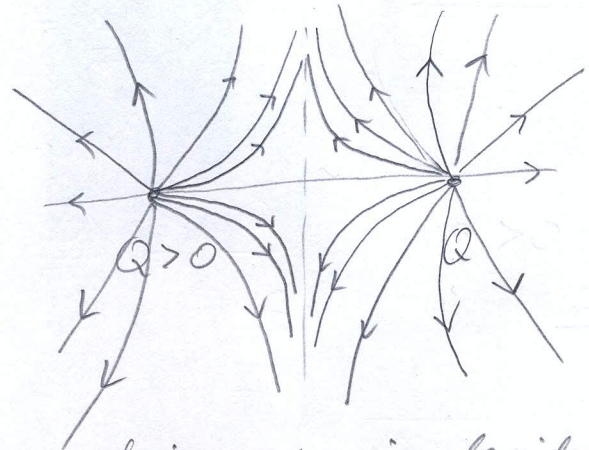
przykłady:



strzałki pokazują zwrot pola

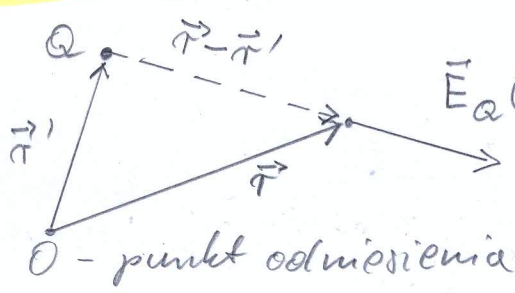
$$\vec{E}_Q(\vec{r})$$

(tutaj $Q > 0$ i strzałki - od ładunku. Gdy $Q < 0$ - strzałki - do ładunku).



Linie pola el-stat. służą jedynie do ilustracji kształtu pola el-stat. i nie mają innego praktycznego znaczenia.

Inny zapis pola $\vec{E}_Q(\vec{r})$ od ład. p-owego Q (niech $Q > 0$)



$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

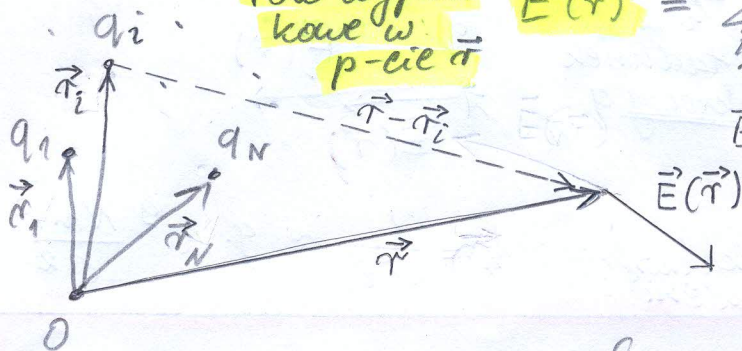
Zasada superpozycji

4

Pole wypadkowe w p-cie $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}), \text{ gdzie}$$

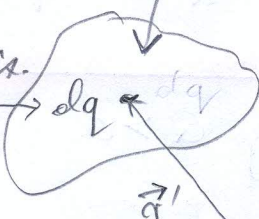
$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{k q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$



gdz ciqgy rozklad taolunku $dq = \rho(\vec{r}') dV'$, $[\rho(\vec{r})] = \frac{C}{m^3}$

ciachowity taolunek Q, V' , objętość

mieszkoms. maty tod.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') =$$

$$= \int_{V'} \frac{k \rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

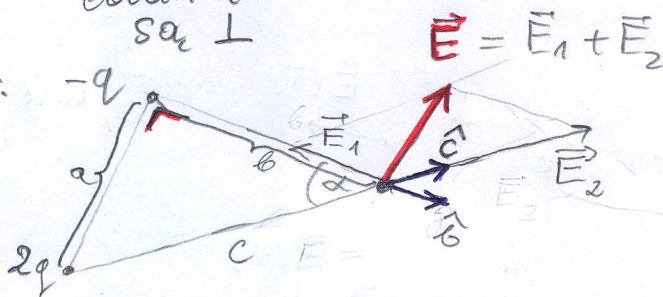
Przykład

1. Rozkład dipolowy: $(q > 0)$

$$\vec{E}_1 = -\frac{kq}{b^2} \hat{b}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{2kq}{c^2} \hat{c}$$

odcinki a i b
 $sa_2 \perp$



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}, \quad E = \sqrt{E^2} = (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2(-\hat{b}) \cdot \hat{c})^{1/2}$$

$$\hat{b} \cdot \hat{c} = \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\lambda = \frac{q}{2\pi a}$ - liniowa gęstość taolunku $[\lambda] = \frac{C}{m}$

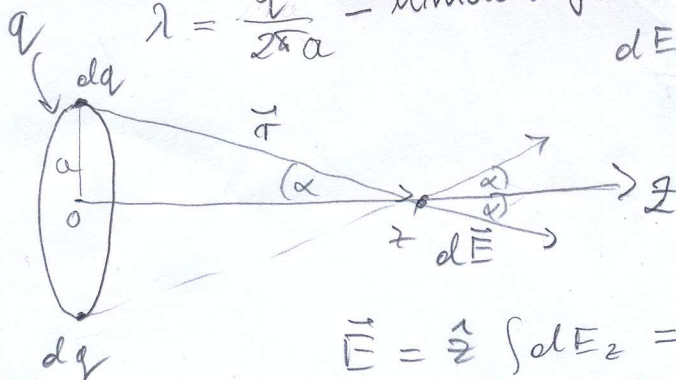
$$dE_2 = dE \cos \alpha$$

$$dE = \frac{k dq}{r^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

2.

Rozkład ciqgy na dręgu



$$\vec{E} = \hat{z} \int dE_2 = \hat{z} \cos \alpha \int \frac{k dq}{r^2} =$$

$$= \hat{z} \cos \alpha \frac{k}{r^2} \int_{-a}^a dq = \hat{z} \frac{kq}{r^2} \cos \alpha$$