Prawo Gaussa dla pola elektrycznego w notacji całkowej i różniczkowej

Pojęcia wstępne

1. Strumień elementarny pola $\vec{E}$

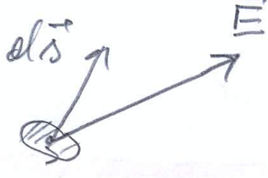
Rozważmy nieskończenie małą powierzchnię płaską o polu powierzchni ds, $[ds] = m^2$, oraz wektor $d\vec{s}$ $\perp$ do tej powierzchni, gdzie $|d\vec{s}| = ds$

<u>uwaga:</u> zwrot wektora $d\vec{s}$ zadaje kierunek obejścia brzegu tej powierzchni zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

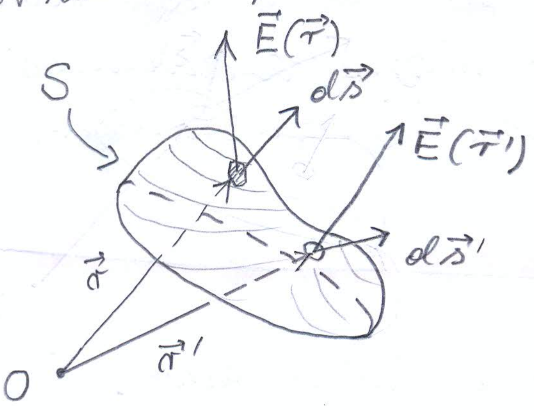
Mówimy, że pow. $d\vec{s}$ jest zorientowana, gdy zadano kierunek obejścia jej brzegu.

Gdy pow. $d\vec{s}$ jest umieszczona w polu el-stat. $\vec{E}$, to strumień elementarny pola $\vec{E}$ ma postać

$$d\phi \stackrel{def}{=} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



2. Strumień pola $\vec{E}(\vec{r})$ przez powierzchnię skończoną S.



$$\phi \stackrel{def}{=} \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Interpretacja mnemotechniczna powyższej całki powierzchniowej:

a) dzielimy całą pow. S na nieskończenie małe, tak samo zorientowane powierzchnie $d\vec{S}$

b) w każdym p-cie pow. S wskazanym przez wektor $\vec{r}$ liczymy strumień elementarny

$$\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

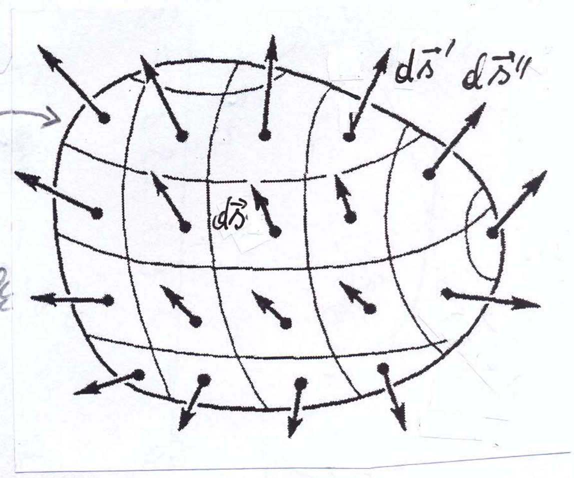
c) wszystkie strumienie elementarne dodajemy otrzymując strumień całkowity ϕ.

<u>Uwaga</u>: Gdy pow. S jest zamknięta to piszemy kółko na całce

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

<u>Dla pow. zamkniętej</u> <u>wszystkie wektory $d\vec{S}$ muszą być skierowane na zewnątrz tej powierzchni.</u>

S — nazywamy powierzchnią Gaussa



Prawo Gaussa w notacji całkowej

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Czytamy: Strumień pola el-stat. przez powierzchnię zamkniętą S jest równy ładunkowi zawartemu w obszarze ograniczonym powierzchnią S.

jest to prawo Gaussa w postaci całkowej.

Uwagi: 1. Prawo Gaussa jest prawem Przyrody. Jest ono prawdziwe także dla pola elektrycznego w ogólności zależnego od czasu $\vec{E}(\vec{r},t)$.

2. Prawo Gaussa nie służy do znajdywania pola elektrycznego (w szczególności elektrostatycznego), podobnie jak całka oznaczona $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$ nie służy do znajdywania f-cji podcałkowej $f(x)$. Chyba, że f-cja ta jest f-cją stałą, $f(x) = C$, wtedy

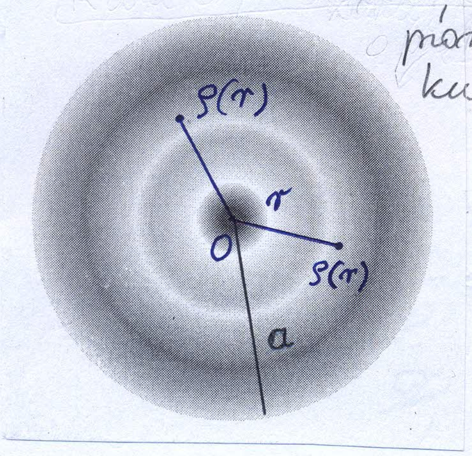
$$\alpha = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b C\,dx = C(b-a),$$

można policzyć stałą „C" z równania $C = \frac{\alpha}{b-a}$ (dla $a \neq b$).

Podobnie, z Prawa Gaussa można policzyć długość wektora $\vec{E}$, ale jedynie w trzech szczególnych przypadkach. Mianowicie, E daje się policzyć dla trzech fundamentalnych rozkładów ładunków.

a) pole $\vec{E}(\vec{r})$ pochodzące od sferycznie-symetrycznego rozkładu ładunku. Niech $\rho(\vec{r})$ – gęstość ładunku $[\rho] = C/m^3$. Mówimy, że ładunek jest sfer-sym. gdy $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ – czyli, zależy od odległości od wybranego punktu, a nie zależy od kierunku w przestrzeni (zależy od r, a nie zal. od $\hat{r}$).

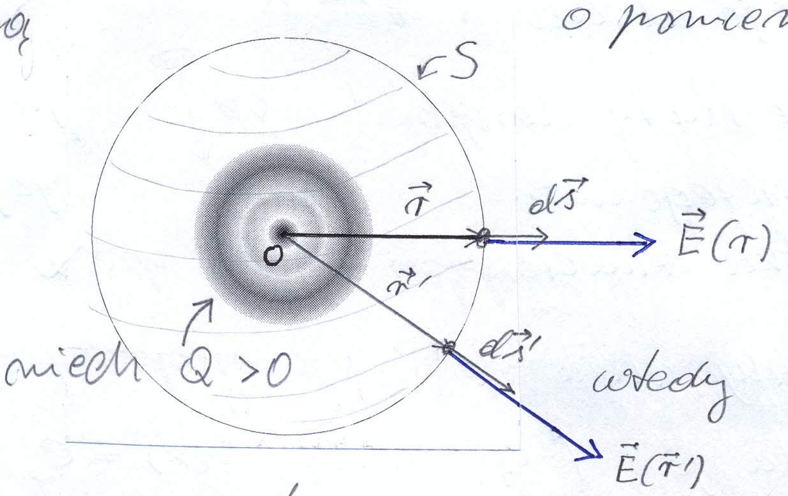
$r \le a$ „promień kuli"



– tutaj: im ciemniejszy obszar tym większe $\rho(r)$.
r ma początek w środku kuli.

wtedy, z symetrii widać, że $E(\vec{r}) = E(\vec{r}\,')$.

Otaczamy kulę współśrodkową z nią pomyślaną sferą S o promieniu $r \geq a$, a – promień kuli.



$$\vec{E}(r)\cdot d\vec{s} = E(r)\,ds$$

wtedy $\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \oint_S E(r)\,ds =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} E(r) = const \\ \text{na sferze } S \\ E(r) = const. \end{array} \right\} = E(r) \underbrace{\oint_S ds}_{4\pi r^2} = 4\pi r^2 E(r)$$

czyli $\phi = 4\pi r^2 E(r)$, oraz z Pr. Gaussa

dostajemy
$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}^{k} \frac{Q}{r^2}$$

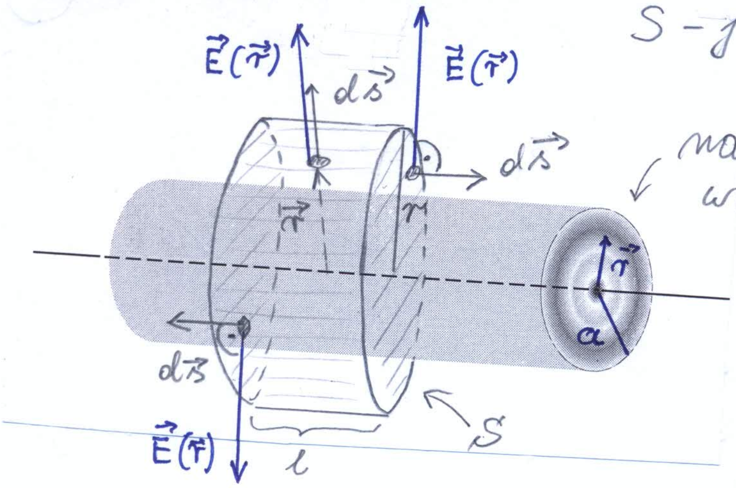
wektorowo możemy napisać

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \qquad \text{bo } \hat{r} = \hat{E}(\vec{r})$$

taka sama postać jak od ładunku punktowego Q umieszczonego w środku sfery. Wzór prawdziwy dla $r > a$.

b) Pole $\vec{E}(\vec{r})$ pochodzące od osiowo symetrycznego rozkładu ładunku – nieskończenie długi walec. Gęstość ładunku jest f-cją odległości od osi walca.

Pole $\vec{E}(\vec{r})$ od naładowanego walca jest prostopadłe do osi walca i $E(\vec{r}) = E(r)$ – zależy od odległości od osi walca.

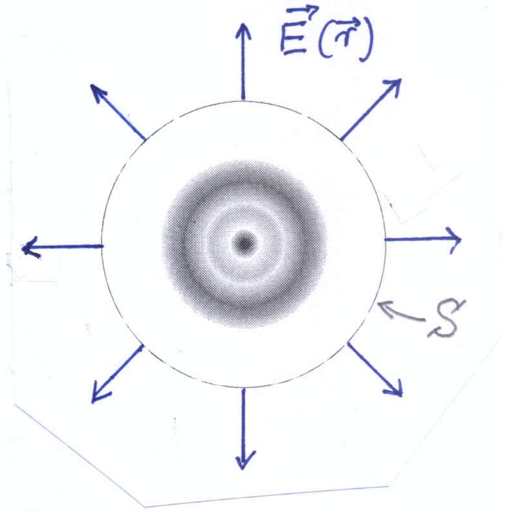


S – jest powierzchnią walca o promieniu $r \geq a$ i długości l.

naładowany walec o prom. „a"

$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, tutaj $\rho(r) > 0$ dla $r \leq a$

Widok „od przodu" pola $\vec{E}(\vec{r})$ na pow. S wokół naładowanego walca



Walec otaczamy pow. walcową S współosiową z naładowanym walcem. Na pobocznicy walca S $\vec{E}(\vec{r}) \parallel d\vec{s}$, na wieczku i denku walca $\vec{E}(\vec{r}) \perp d\vec{s}$.

Niech S_p – pobocznica walca, S_w i S_d – wieczko i denko walca.

Wtedy $S = S_p \cup S_w \cup S_d$

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{S_p} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{S_w} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}}_{=0} + \underbrace{\int_{S_d} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}}_{=0} = \int_{S_p} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

lecz na pobocznicy walca S_p $\vec{E}(\vec{r}) \parallel d\vec{s}$ i są zgodnie skierowane $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = E(r)\, ds$

wtedy

$$\phi = \int_{S_p} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{S_p} E(\vec{r})\, ds = \left\{ \begin{array}{l} E(\vec{r}) = E(r) \\ \text{stałe na} \\ \text{pow. } S_p \end{array} \right\} =$$

$$= E(r) \underbrace{\int_{S_p} ds}_{\substack{\text{pole powierzchni} \\ \text{pobocznicy walca S wynosi } 2\pi r l}} = 2\pi r l\, E(r)$$

Walec S wycina z naładowanego walca ładunek $Q(l)$, wtedy

Z Prawa Gaussa dostajemy

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \frac{Q(l)}{\varepsilon_0}$$

Czyli $2\pi r l\, E(r) = \frac{Q(l)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \overbrace{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}}^{2k} \frac{Q(l)/l}{r}$

lecz $Q(l)/l = \lambda$ – ładunek przypadający na jednostkę długości naładowanego walca

stąd

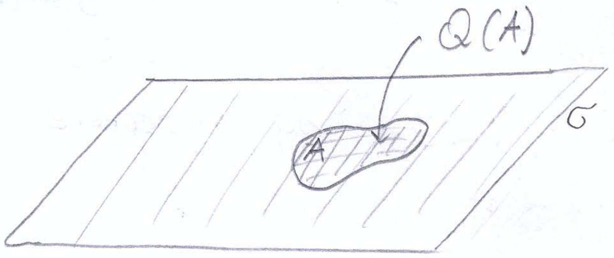
$$E(r) = \frac{2k\lambda}{r} \qquad \left(\text{gdy } \lambda < 0 \quad E(r) = \frac{2k|\lambda|}{r} \right)$$

jeżeli przyjmiemy, że $\vec{r} \perp$ do osi naładowanego walca to

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}, \quad \text{gdzie } \lambda \gtrless 0$$

prawdziwy dla $r \geq a$

c) Pole $\vec{E}(\vec{r})$ od naładowanej płaszczyzny, ładunkiem

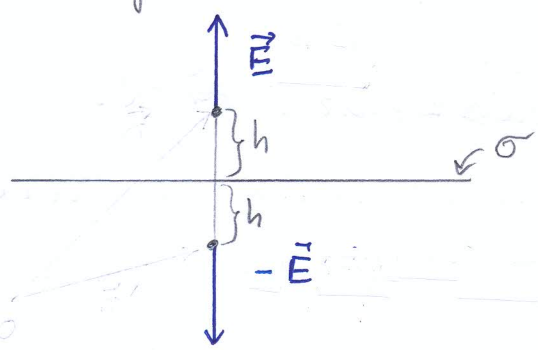


o gęstości powierzchniowej $\sigma = \frac{Q(A)}{A}$, gdzie

$Q(A)$ – ładunek na powierzchni A.

niech $\sigma > 0$.

Z symetrii wynika, że gdy σ stałe na całej płaszczyźnie to (widok z boku)

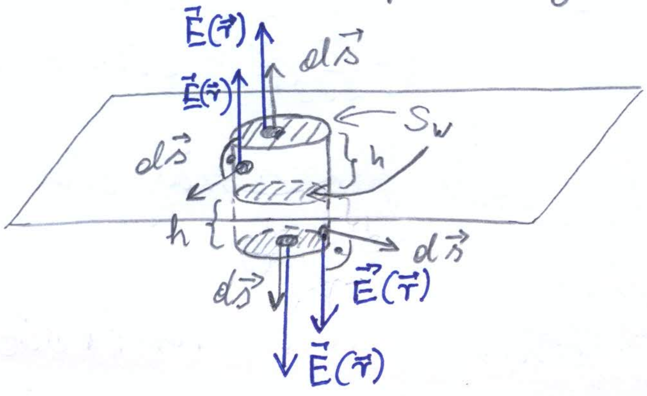


h - odległość p-tu przestrzeni od płaszczyzny

Uwaga. Symetrycznie po obu stronach płaszczyzny wektory pola el-stat. są przeciwne.

(11)

Wybieramy pow. Gaussa S w postaci walca, który ma wieczko i denko || do płaszczyzny i płaszczyzna dzieli walec na dwie połowy.



Na wieczku i denku walca

$$\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = E(\vec{r})\,ds$$

Na pobocznicy walca

$$\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = 0$$

bo $\vec{E}(\vec{r}) \perp d\vec{s}$

$S = S_p \cup S_w \cup S_d$ stąd $\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} =$

$$= \overbrace{\int_{S_p} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s}}^{=0} + \int_{S_w} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} + \int_{S_d} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = 2\int_{S_w} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} =$$

$$= 2\int_{S_w} E(\vec{r})\,ds = \left\{\begin{matrix} E(\vec{r}) - \text{stałe} \\ \text{na wieczku} \\ \text{walca}\end{matrix}\right\} = 2E(\vec{r})\underbrace{\int_{S_w} ds}_{S_w} = 2E(\vec{r})\,S_w$$

z prawa Gaussa

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \frac{Q(S_w)}{\varepsilon_0}$$ – ładunek zawarty wewnątrz walca (wycięty z płaszczyzny)

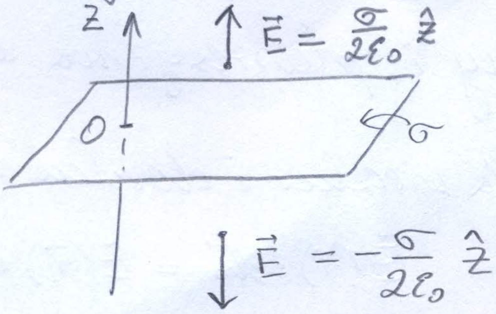
czyli

$$2E(\vec{r})\,S_w = \frac{Q(S_w)}{\varepsilon_0}$$ stąd $$E(r) = \frac{Q(S_w)/S_w}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Czyli pole $\vec{E}$ jest stałe nad i pod płaszczyzną i jego wartość wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

jeśli wybierzemy oś $\perp$ do płaszczyzny o wersorze $\hat{z}$



to

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} \; ; & \text{dla } z > 0 \\ \vec{0} \; ; & \text{dla } z = 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} \; ; & \text{dla } z < 0 \end{cases}$$

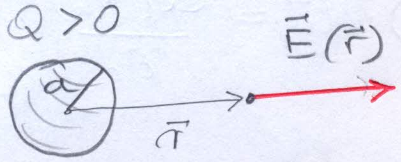
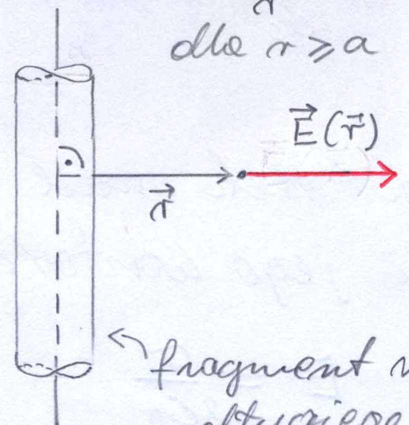
wzór prawdziwy dla $\sigma \gtrless 0$

Pole $\vec{E}$ nie zależy od „z" nad i pod płaszczyzną.

Mówimy, że pole $\vec{E}$ od jednorodnie naładowanej płaszczyzny jest jednorodne (nad i pod płaszczyzną).

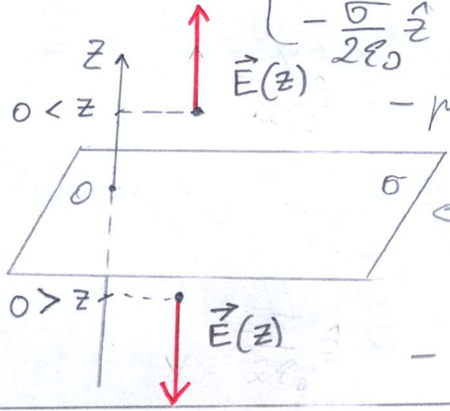
Uwaga: Jest oczywiste, że $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$. !

Podsumowanie

rozkład ładunku	pole $\vec{E}(\vec{r})$
1. sferycznie symetr. (kula, sfera, ładunek punktowy)	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ dla $r \geqslant a$ 
2. osiowo symetr. (nieskończ. długi walec lub drut prostoliniowy)	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$; $\lambda = \frac{Q(l)}{l}$ dla $r \geqslant a$  fragment nieskończenie długiego walca

3. ładunek na płaszczyźnie

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & ; \; z > 0 \\ \vec{0} & ; \; z = 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & ; \; z < 0 \end{cases}$$



– pole jednorodne

← fragment płaszczyzny

– pole jednorodne

Prawo Gaussa w notacji różniczkowej

Wychodzimy z prawa Gaussa w not. całkowej:

$$(*) \qquad \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Niech $\rho(\vec{r})$ – gęstość ładunku Q, wtedy

$$(**) \qquad Q = \int_{V_s} \rho(\vec{r})\, dV$$

, gdzie V_s – objętość obszaru ograniczonego powierzchnią Gaussa S.

Tw. Gaussa-Ostrogradskiego (jest to twierdzenie matematyczne)

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{V_s} \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})\, dV,$$

gdzie $\vec{A}(\vec{r})$ jest dowolnym, różniczkowalnym polem wektorowym.

Dla pola el-stat. $\vec{E}(\vec{r})$ twierdzenie G-O ma, oczywiście, postać:

$$(***) \qquad \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{V_s} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})\, dV$$

Podstawiamy (***) i (**) do (*) i dostajemy:

$$\int_{V_s} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V_s} \rho(\vec{r})\, dV$$

czyli

$$\int_{V_s} \left[\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \right] dV = 0 \qquad (4*)$$

lecz Prawo Gaussa jest prawdziwe dla dowolnej pow. Gaussa (zamkniętej) S $\rightarrow$ (4*) jest prawdziwe dla dowolnej objętości V_s, czyli

$$\underset{V_S}{\forall} \int_{V_S} \left[\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \right] dV = 0 \qquad (5*)$$

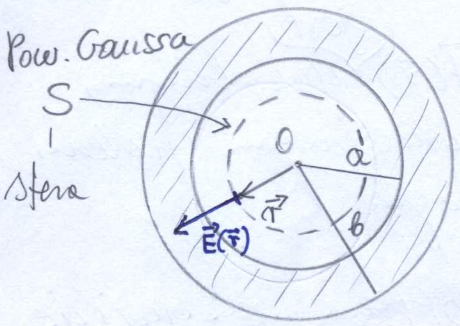
lecz $(5*) \iff \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0$, stąd

różniczkowa postać Prawa Gaussa:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

– jest prawdziwe ogólnie, gdy $\vec{E}$ zależy od czasu, $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Pole wewnątrz wydrążonej kuli.



Załóżmy, że wydrążenie jest współśrodkowe z kulą, oraz że powstały w ten sposób pierścień kulisty o promieniach „a" i „b" jest jednorodnie naładowany (obszar zakreskowany) ładunkiem elektrycznym.

W p-cie wskazanym wektorem $\vec{r}$ (wewnątrz wydrążenia) $\underline{r \le a}$ jeśli jest niezerowe pole $\vec{E}(\vec{r})$ to, z symetrii wynika, że jest skierowane wzdłuż promienia, np. na zewnątrz (patrz rysunek). Lecz wtedy przez powierzchnię zamkniętą S (linia przerywana) strumień pola $\vec{E}(\vec{r})$ wynosi

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{E}(\vec{r}) \parallel d\vec{s} \\ \text{i są zgodnie} \\ \text{skierowane} \end{array} \right\} = \oint_S E(r)\, ds = \left\{ \begin{array}{l} \text{wszędzie na } S \\ \text{pole } E(r) \text{ ma} \\ \text{tą samą} \\ \text{wartość} \end{array} \right\} =$$

$$= E(r) \overbrace{\oint_S ds}^{4\pi r^2} = 4\pi r^2 E(r),$$ czyli z Prawa Gaussa dostajemy

$$4\pi r^2 E(r) = Q/\varepsilon_0,$$ gdzie Q to ładunek znajdujący się wewnątrz sfery S. Lecz $Q = 0$ bo w wydrążeniu nie ma ładunku.

Czyli $4\pi r^2 E(r) = 0 \Rightarrow E(r) = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$

dla $r \leq a$

Uwaga: Szczególnym przypadkiem pierścienia kulistego jest sfera (dla $a = b$) izotropowo naładowana (izotropowo = jednakowo we wszystkich kierunkach).

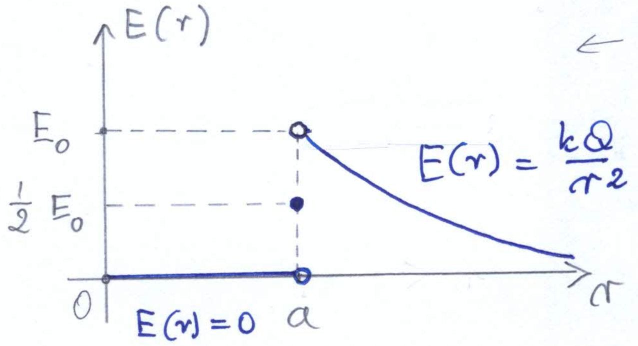
A zatem, wewnątrz izotropowo naładowanej sfery

$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ dla $r < a$ – promień sfery

Gdy $r = a$ to można pokazać, że

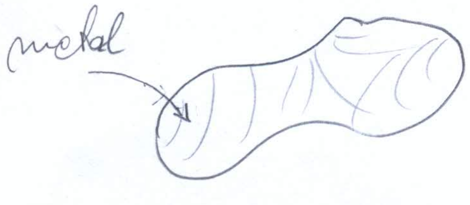
$\vec{E} = \frac{1}{2} \frac{kQ}{a^2} \hat{r}$, gdzie $\frac{kQ}{a^2}$ – wartość pola tuż nad sferą, Q – całkowity ładunek sfery.

Wykres niech $E_0 = \frac{kQ}{a^2}$



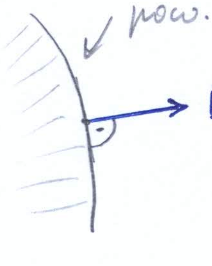
← pole $E(r)$ od izotropowo naładowanej sfery

Naładowany przewodnik dowolnego kształtu



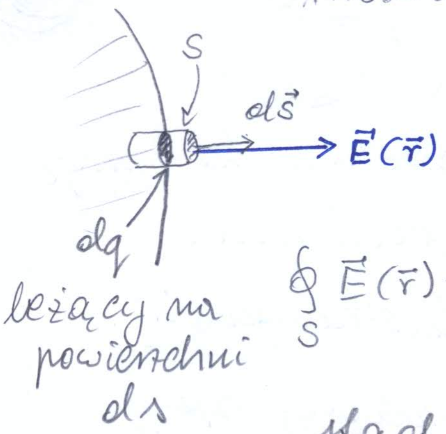
1. Wewnątrz przewodnika pole $\vec{E} = \vec{0}$
2. Ładunek przewodnika znajduje się na jego powierzchni i jest rozmieszczony z gęstością powierzchniową σ.
3. Związek pom. polem $\vec{E}(\vec{r})$ tuż nad pow. przewodnika a gęstością powierzchniową ładunku σ:

pow. przewodnika



$\vec{E}(\vec{r}) \perp$ do powierzchni przewodnika (jeśli nie, to składowa styczna do pow. powodowałaby przepływ prądu $\Rightarrow$ sytuacja nie jest statyczna)

Z Prawa Gaussa (pow. S to b. mały walec o wieczku ∥ do pow. przewodnika)



$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} \cong \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \underbrace{E(\vec{r})\,ds = \frac{dq}{\varepsilon_0}}$$

stąd $$E(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\frac{dq}{ds}}_{\sigma} = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Czyli na powierzchni przewodnika

$$E(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

i wektor $\vec{E}(\vec{r}) \perp$ do pow. przewodnika i skierowany na zewnątrz przewodnika.

Potencjał pola el-stat. $E(\vec{r})$

Def: Potencjałem pola el-stat. $\vec{E}(\vec{r})$ nazywamy takie pole skalarne $V(\vec{r})$, że

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}).$$

Uwaga: pole $V(\vec{r})$ nie jest jednoznacznie określone, ponieważ pole $\tilde{V}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + C$, gdzie C - dowolna stała rzeczywista, daje to samo $\vec{E}(\vec{r})$, mianowicie:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = -\nabla \tilde{V}(\vec{r}) = -\nabla [V(\vec{r}) + C] = -\nabla V(\vec{r}) - \underbrace{\nabla C}_{\vec{0}} = -\nabla V(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$$

a) Aby znaleźć potencjał pola el-stat. pochodzącego od ładunku punktowego (pola od sferycznie-sym. rozkładu ładunku), $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$, zauważmy:

niech $f(r)$ - f-cja zależna od długości wektora $\vec{r}$, wtedy

$$\nabla f(r) = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} f(r) + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} f(r) + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} f(r),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, (x, y, z) - współrzędne wektora $\vec{r}$.

Wtedy $\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \left\{\begin{array}{l}\text{pochodna} \\ \text{f-cji złożonej} \\ \text{bo } r = r(x,y,z)\end{array}\right\} = \left[\frac{d}{dr} f(r)\right] \frac{\partial r}{\partial x}$

lecz $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r}$

Czyli $\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{x}{r} \frac{df(r)}{dr}$, podobnie $\frac{\partial}{\partial y} f(r) = \frac{y}{r} \frac{df(r)}{dr}$

oraz $\frac{\partial}{\partial z} f(r) = \frac{z}{r} \frac{df(r)}{dr}$, stąd, ostatecznie:

$$\nabla f(r) = \underbrace{\left(\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z\right)}_{\vec{r}} \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} = \overbrace{\frac{\vec{r}}{r}}^{\hat{r}} \frac{df(r)}{dr} = \hat{r} \frac{df(r)}{dr}$$

Czyli $\nabla f(r) = \hat{r} \frac{d}{dr} f(r)$ (*)

Wracamy do pola $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2} \hat{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{kQ}{r}\right) \hat{r} =$

$$= -\hat{r} \frac{d}{dr}\left(\frac{kQ}{r}\right) = -\nabla\left(\frac{kQ}{r}\right)$$

stąd odczytujemy, że (patrz (*)) zgodnie z (*)

$$V(\vec{r}) \equiv V(r) = \frac{kQ}{r} + C.$$

Ponieważ sfer-sym. rozkład ładunku Q jest zlokalizowany (punkt, kula lub sfera) to możemy przyjąć, że $V(r \to \infty) = 0$ i dostajemy $C = 0$.

Ostatecznie ($r > 0$ gdy punkt, $r \geqslant a$ gdy sfera lub kula)

$$\boxed{V(r) = \frac{kQ}{r}}$$

b) Analogicznie, dla pola el-stat., którego źródłem jest osiowo-symetryczny rozkład ładunku ($r > 0$ – dla nitki, $r \geqslant a$ – dla walca albo rury o promieniu a)

$$E(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r} \hat{r} = \hat{r} \frac{d}{dr}\left(2k\lambda \ln r\right) \overset{(*)}{=} \nabla\left(2k\lambda \ln r\right) =$$

$$= -\nabla\left(-2k\lambda \ln r\right)$$

Odczytujemy stąd, że $V(\vec{r}) \equiv V(r) = -2k\lambda \ln r + C$, lecz tutaj dla $r \to \infty$ $V(r) \to -\infty$ i nie można przyjąć

że $V(r \to \infty) = 0$. Dlatego żądamy, aby $V(r_0) = 0$

gdzie $r_0 \geqslant a$, czyli $V(r_0) = 0 = -2k\lambda \ln r_0 + C \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 2k\lambda \ln r_0$. Stąd, ostatecznie

$$\boxed{V(r) = -2k\lambda \ln \frac{r}{r_0}}$$, tutaj $V(\vec{r}) \equiv V(r)$ gdzie $\vec{r} \perp$ do osi walca (albo do prostej)

c)

Dla pola el-stat. jednorodnego (np. nad naładowaną płaszczyzną) dostajemy:

$$\vec{E}(z \geqslant 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} = \hat{z}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Uwaga:} \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ i } \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= -\underbrace{\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla}\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\right) = -\nabla\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\right)$$

Czyli $V(\vec{r}) \equiv V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + C$, gdzie oś $Z \perp$ do naładow. płaszczyzny.

Możemy przyjąć, że $V(z_0) = 0$ dla $z_0 \geqslant 0$ i wtedy, ostatecznie

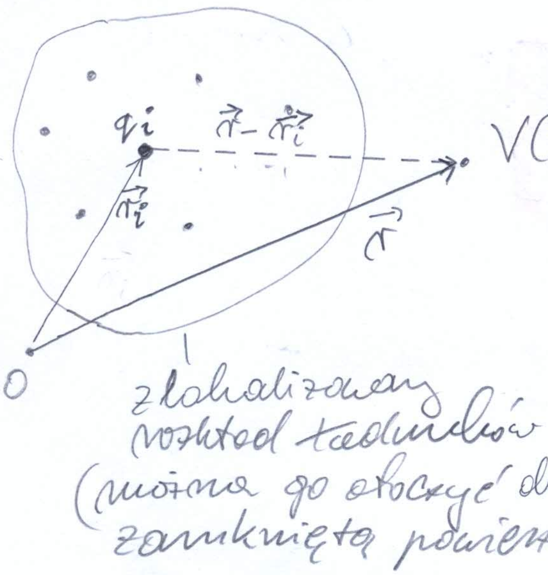
$$\boxed{V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z - z_0)}$$

Podsumowanie

Rozkład ładunku	$\vec{E}(\vec{r})$	$V(\vec{r})$
1. Sferycznie-symetr. (ład. punktowy albo kula o prom. a, $\rho(\vec{r})=\rho(r)$)	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ dla $r \geq a$	$V(r) = \frac{kQ}{r}$ dla $r \geq a$
2. Osiowo-symetr. (naładowana prosta, albo walec o prom. a $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$)	$E(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$ dla $r \geq a$ $\vec{r} \perp$ do osi walca (do prostej)	$V(r) = -2k\lambda \ln\frac{r}{r_0}$ dla $r \geq a$
3. Naładowana płaszczyzna z gęstością pow. σ	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{z})$ „+" nad płaszczyzną „−" pod płaszczyzną Oś $Z \perp$ płaszcz.	$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z - z_0)$

Potencjał $V(\vec{r})$ dla dowolnego pola el-stat. od zlokalizowanego rozkładu ładunków:

a) Gdy rozkład dyskretny:



$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Wykaż, że faktycznie

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

!