Potencjał pola el-stat. $\vec{E}(\vec{r})$

Def: Potencjałem pola el-stat. $\vec{E}(\vec{r})$ nazywamy takie pole skalarne $V(\vec{r})$, że

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}).$$

Uwaga: pole $V(\vec{r})$ nie jest jednoznacznie określone, ponieważ pole $\tilde{V}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + C$, gdzie C - dowolna stała rzeczywista, daje to samo $\vec{E}(\vec{r})$, mianowicie:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = -\nabla \tilde{V}(\vec{r}) = -\nabla[V(\vec{r}) + C] = -\nabla V(\vec{r}) - \underbrace{\nabla C}_{\vec{0}} = -\nabla V(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$$

a) Aby znaleźć potencjał pola el-stat. pochodzącego od ładunku punktowego (pole od sferycznie-sym. rozkładu ładunku), $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$, zauważmy:

niech $f(r)$ - f-cja zależna od długości wektora $\vec{r}$, wtedy

$$\nabla f(r) = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}f(r) + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}f(r) + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}f(r),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, (x, y, z) - współrzędne wektora $\vec{r}$.

Wtedy $\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \left\{ \begin{array}{l} \text{pochodna} \\ \text{f-cji złożonej} \\ \text{bo } r = r(x,y,z) \end{array} \right\} = \left[\frac{d}{dr} f(r)\right] \frac{\partial r}{\partial x}$

lecz $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r}$

Czyli $\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{x}{r} \frac{df(r)}{dr}$, podobnie $\frac{\partial}{\partial y} f(r) = \frac{y}{r}\frac{df(r)}{dr}$

oraz $\frac{\partial}{\partial z} f(r) = \frac{z}{r}\frac{df(r)}{dr}$, stąd, ostatecznie:

$$\nabla f(r) = \underbrace{\left(\hat{x}\,x + \hat{y}\,y + \hat{z}\,z\right)}_{\vec{r}} \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} = \overbrace{\frac{\vec{r}}{r}}^{\hat{r}} \frac{df(r)}{dr} = \hat{r}\frac{df(r)}{dr}$$

Czyli $\nabla f(r) = \hat{r}\frac{d}{dr} f(r)$ (*)

Wracamy do pola $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{kQ}{r}\right)\hat{r} =$

$$= -\hat{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{kQ}{r}\right) = -\nabla\left(\frac{kQ}{r}\right)$$

stąd odczytujemy, że (patrz (*)) zgodnie z (*)

$$V(\vec{r}) \equiv V(r) = \frac{kQ}{r} + C.$$

Ponieważ sfer-sym. rozkład ładunku Q jest zlokalizowany (punkt, kula lub sfera) to możemy przyjąć, że $V(r \to \infty) = 0$ i dostajemy $C = 0$.

Ostatecznie ($r > 0$ gdy punkt, $r \geq a$ gdy sfera lub kula)

$$\boxed{V(r) = \frac{kQ}{r}}$$

b) Analogicznie, dla pola el-stat., którego źródłem jest osiowo-symetryczny rozkład ładunku ($r > 0$ – dla nitki, $r \geq a$ – dla walca albo rury o promieniu a)

$$E(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r} = \hat{r}\frac{d}{dr}\left(2k\lambda \ln r\right) \overset{(*)}{=} \nabla\left(2k\lambda \ln r\right) =$$

$$= -\nabla\left(-2k\lambda \ln r\right)$$

Odczytujemy stąd, że $V(\vec{r}) \equiv V(r) = -2k\lambda \ln r + C$, lecz tutaj dla $r \to \infty$ $V(r) \to -\infty$ i nie można przyjąć że $V(r \to \infty) = 0$. Dlatego żądamy, aby $V(r_0) = 0$ gdzie $r_0 \geq a$, czyli $V(r_0) = 0 = -2k\lambda \ln r_0 + C$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $C = 2k\lambda \ln r_0$. Stąd, ostatecznie

(15)

$$\boxed{V(r) = -2k\lambda \ln \frac{r}{r_0}}$$

, tutaj $V(\vec{r}) \equiv V(r)$ gdzie $\vec{r} \perp$ do osi walca (albo do prostej)

c)

Dla pola el-stat. jednorodnego (np. nad naładowaną płaszczyzną) dostajemy:

Uwaga:

$$\vec{E}(z \geq 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} = \hat{z}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\right) = \left\{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ i } \frac{\partial z}{\partial z} = 1\right\} =$$

$$= -\underbrace{\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla}\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\right) = -\nabla\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z\right)$$

czyli $V(\vec{r}) \equiv V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + C$, gdzie oś $Z \perp$ do naładow. płaszczyzny.

Możemy przyjąć, że $V(z_0) = 0$ dla $z_0 \geq 0$ i wtedy, ostatecznie

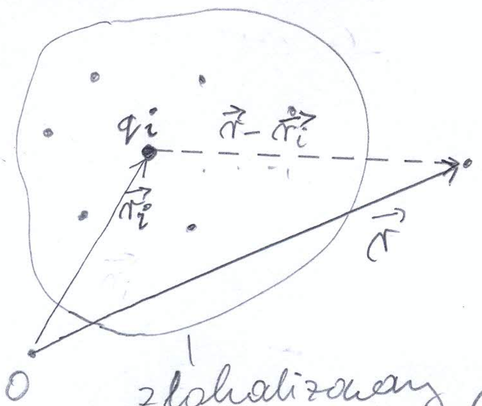
$$\boxed{V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z - z_0)}$$

Podsumowanie

Rozkład ładunku	$\vec{E}(\vec{r})$	$V(\vec{r})$
1. Sferycznie-symetr. (ład. punktowy albo kula o prom. a, $\rho(\vec{r})=\rho(r)$)	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ dla $r \geq a$	$V(r) = \frac{kQ}{r}$ dla $r \geq a$
2. Osiowo-symetr. (naładowana prosta, albo walec o prom. a $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$)	$E(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$ dla $r \geq a$ $\vec{r} \perp$ do osi walca (do prostej)	$V(r) = -2k\lambda \ln\frac{r}{r_0}$ dla $r \geq a$
3. Naładowana płaszczyzna z gęstością pow. σ	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{z})$ „+" nad płasz- „−" pod czyzną Oś $Z \perp$ płaszcz.	$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z - z_0)$

Potencjał $V(\vec{r})$ dla dowolnego pola el-stat. od zlokalizowanego rozkładu ładunków:

a) Gdy rozkład dyskretny:



zlokalizowany rozkład ładunków (można go otoczyć dowolną zamkniętą powierzchnią)

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

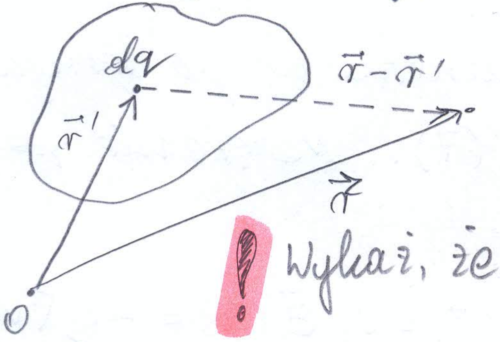
Wykaż, że faktycznie

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

!

b) Gdy układ ciągły i zlokalizowany

V' – objętość, w której zawiera się ładunek

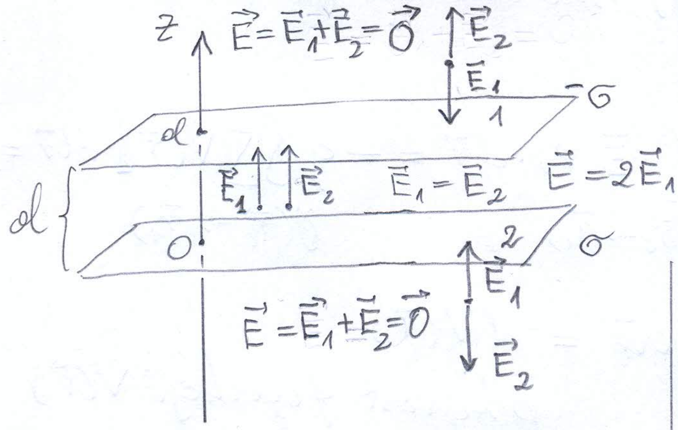


$$V(\vec r) = \int_V \frac{k\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, dV'$$

! Wykaż, że $\vec E(\vec r) = -\nabla V(\vec r) = \int_V \frac{k\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}(\vec r - \vec r')\, dV'$

Kondensator płaski

Układ dwóch płaszczyzn równoległych naładowanych ładunkami o gęstości pow. σ i $-\sigma$, gdzie $\sigma > 0$, odległość płaszczyzn wynosi d.



$\vec E = \vec E_1 + \vec E_2$,

dla $0 < z < d$ $\quad \vec E_1 = \vec E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat z$

$$\vec E = 2\vec E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat z$$

dla $z < 0$ i $z > d$

$$\vec E = \vec 0$$

Potencjał pola $\vec E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat z$ w obszarze $0 < z < d$:

łatwo zgadnąć, że

$$\vec E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat z = \hat z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z\right) = \underbrace{\left(\hat x \frac{\partial}{\partial x} + \hat y \frac{\partial}{\partial y} + \hat z \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z\right) = -\nabla\underbrace{\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z\right)}_{V(z)}$$

Czyli

$$V(\vec r) \equiv V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z$$

Różnica potencjałów między płaszczyznami

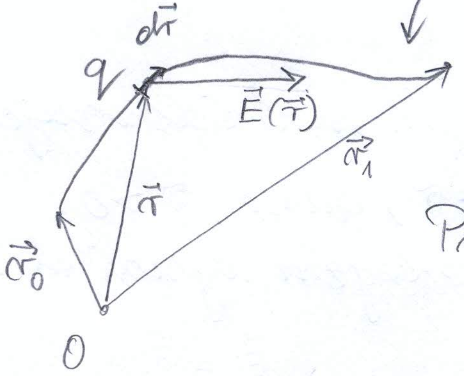
$$U = |V(d) - V(0)| = \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{E} d = E d$$

czyli $\boxed{U = E d}$

Energia mechaniczna ładunku p-towego q w polu el-stat

Załóżmy, że ład. p-towy q porusza się po krzywej γ w polu el-stat. o potencjale $V(\vec{r})$. Natężenie pola el-stat wynosi $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$.

Siła działająca na ład. q : $\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\nabla V(\vec{r})$



$\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)$ - czytamy: krzywa gamma o początku w p-cie $\vec{r}_0$ i końcu w p-cie $\vec{r}_1$

Praca siły $\vec{F}_q(\vec{r})$ na drodze $\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)$

$$W_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} = \int\limits_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} \vec{F}_q(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q \int\limits_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -q \int\limits_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} [\nabla V(\vec{r})] \cdot d\vec{r}$$

fakt matematyczny: $[\nabla V(\vec{r})] \cdot d\vec{r} = dV(\vec{r})$

przyrost funkcji $V(\vec{r})$

Wtedy

$$W_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r})} = -q \underbrace{\int\limits_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} dV(\vec{r})}_{} = -q\left[V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_0)\right]$$

sumujemy przyrosty f-cji $V(\vec{r})$ na drodze γ pomiędzy $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_1$.

Czyli

$$\boxed{W_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} = -q\left[V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_0)\right]}$$

Praca ta nie zależy od kształtu drogi γ, a jedynie od położenia jej p-tów krańcowych.

Załóżmy, że na ład. q działa siła zewnętrzna, która równoważy siłę $\vec{F}_q(\vec{r})$, czyli $\vec{F}_{zew}(\vec{r}) = -\vec{F}_q(\vec{r})$.

Wtedy praca sił $\vec{F}_{zew}(\vec{r})$ wynosi:

$$W^{zew}_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} = \int_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} \vec{F}_{zew}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} =$$

$$= q\left[V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_0)\right]$$

Zawsze można przyjąć, że potencjał el-stat. znika w $\vec{r}_0$, czyli $V(\vec{r}_0) = 0$. Wtedy

$$W^{zew}_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r}_1)} = q\,V(\vec{r}_1)$$

niech $\vec{r}_1$ - dowolny punkt w przestrzeni, ozn. przez $\vec{r}$

wtedy
$$W^{zew}_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r})} = q\,V(\vec{r})$$

Def. Energią potencjalną ładunku punktowego q znajdującego się w punkcie $\vec{r}$ pola el-stat. o potencjale $V(\vec{r})$ nazywamy
$$U(\vec{r}) = q\,V(\vec{r}).$$

Tw.
$$U(\vec{r}) = W^{zew}_{\gamma(\vec{r}_0 \to \vec{r})}, \quad \text{gdzie } V(\vec{r}_0) = 0$$
(Tw. to udowodniłem powyżej.)

Energia potencjalna oddziaływ. dwóch ładunków p-towych q_1 i q_2 to z definicji

$$q_1 \xrightarrow{\vec{r}} q_2 \qquad \underbrace{U(\vec{r}) = q_1 V_2(\vec{r})}$$

potencjał pola, kt. źródłem jest q_2.

lecz pamiętamy, że $V_2(\vec{r}) = \frac{kq_2}{r}$, stąd

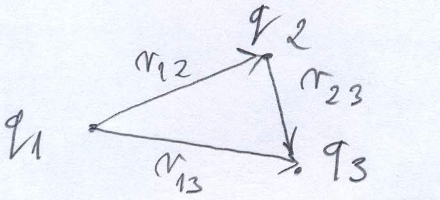
$$\boxed{U(\vec{r}) = \frac{kq_1q_2}{r}}$$

(Jak widać $U(\vec{r}) = q_2 V_1(\vec{r}) = \frac{kq_1q_2}{r}$)

Gdy w przestrzeni mamy N-ładunków p-towych, wtedy całkowitą energię potencjalną oddziaływania tych ładunków znajdujemy sumując energie potencjalne po niepowtarzających się parach ładunków:

(**) $$U_{tot} = \sum_{i<j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \; ; \quad \text{gdzie } r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \quad i,j = 1, 2, \dots, N$$

np. dla trzech ład. q_1, q_2, q_3:



$$U_{tot} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

Prawo zachowania energii mechanicznej dla ład. p-towego q w polu el-stat. o potencjale $V(\vec{r})$

$$\boxed{E_{mech} = \frac{mv^2}{2} + qV(\vec{r}) = const}$$, m – masa ład. q.

Dowód: Dowodzę, że $\frac{d}{dt}E_{mech} = 0$:

$$\frac{d}{dt}E_{mech} = \frac{m}{2}\underbrace{\frac{d}{dt}v^2}_{a} + q\underbrace{\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t))}_{b}$$

$$a = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\vec{v}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}\text{ - przyspieszenie ład. } q} = 2\vec{v}\cdot\vec{a} = \left\{\vec{a} = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{m} = \frac{q\vec{E}(\vec{r})}{m}\right\} = 2\frac{q}{m}\vec{v}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

$$b = \frac{d}{dt} V(\vec r(t)) = \left\{ \begin{array}{l}\text{pochodna}\\ \text{f-cji złożonej}\end{array}\right\} = \frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial V}{\partial x}(\vec r) + \frac{dy(t)}{dt}\frac{\partial V}{\partial y}(\vec r) + \frac{dz(t)}{dt}\frac{\partial V}{\partial z}(\vec r) = \underbrace{\left(\hat x\, \dot x(t) + \hat y\, \dot y(t) + \hat z\, \dot z(t)\right)}_{\vec v(t)} \cdot \underbrace{\left(\hat x \frac{\partial V}{\partial x}(\vec r) + \hat y \frac{\partial V}{\partial y}(\vec r) + \hat z \frac{\partial V}{\partial z}(\vec r)\right)}_{\nabla V(\vec r)} =$$

$$= \vec v \cdot [\nabla V(\vec r)]$$

Stąd

$$\dot E_{mech} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}q}{\cancel{m}}\, \vec v \cdot \vec E(\vec r) + q\vec v \cdot [\nabla V(\vec r)] =$$

$$= q\vec v \cdot [\vec E(\vec r) + \nabla V(\vec r)] = \left\{ \text{lecz } \vec E(\vec r) = -\nabla V(\vec r) \right\} =$$

$$= q\vec v \cdot \vec 0 = \underline{\underline{0}} \quad \text{cnd.}$$

Prawo zachowania energii mechanicznej dla układu N ład. p-towych

$$\boxed{E_{mech} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + U_{tot} = const} \qquad U_{tot} = (**)$$

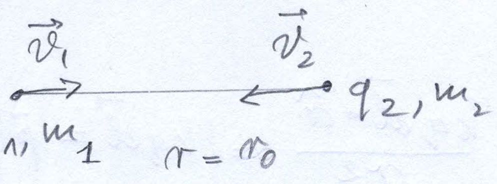
Łatwo dowieść, że $\dot E_{mech} = 0$ – dowodu nie wymagam

przykład dla dwóch ład. p-towych q_1 i q_2

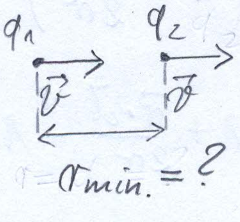
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k q_1 q_2}{r_{12}} = const. \, , \quad r_{12} = |\vec r_1 - \vec r_2| \equiv r$$

Niech $q_1 > 0$ i $q_2 > 0$, oraz ładunki te zderzają się centralnie, z prędkościami $\vec V_1$ i $\vec v_2$ gdy $r = r_0$ – znane. Oblicz minimalną odległość między ładunkami, $r_{min} = ?$

1.



2.



W tym momencie prędkości obu ładunków są jednakowe, $\vec v$.

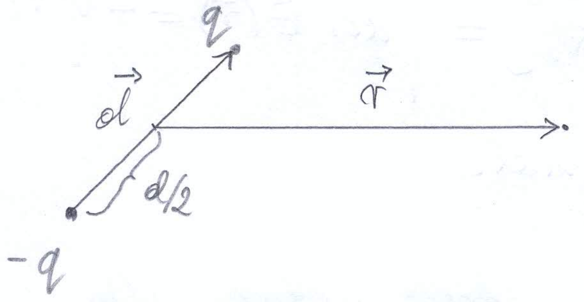
Wsk: Prawo zachowania energii mech. + prawo zach. pędu:

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k q_1 q_2}{r_0} = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 + \frac{k q_1 q_2}{r_{min}} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \end{cases}$$

Stąd liczymy v i r_{min}, tutaj v_1, v_2 i v – x-owe współrzędne wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ i $\vec{v}$.

Dipol elektryczny

(układ ład. p-towych $q>0$ i $-q$ odległych o d)



$V(\vec{r}) = ?$

Zakładamy, że $r \gg d$ $\left(\frac{d}{r} \ll 1\right)$

Szukamy $V(\vec{r})$, a stąd $\vec{E}(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = V_q(\vec{r}) + V_{-q}(\vec{r}) = \left\{ V_{\pm q}(\vec{r}) = \frac{\pm k q}{|\vec{r} \mp \vec{d}/2|} \right\} =$$

$$= \frac{kq}{|\vec{r} - \vec{d}/2|} - \frac{kq}{|\vec{r} + \vec{d}/2|} = \ldots$$

lecz $\frac{1}{|\vec{r} + \vec{d}/2|} = \left[\left(\vec{r} + \vec{d}/2 \right)^2 \right]^{-1/2} = \left(r^2 + \frac{d^2}{4} + \vec{r} \cdot \vec{d} \right)^{-1/2} =$

$$= \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{d}{2r} \right)^2 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \right)^{-1/2} = \left\{ \begin{matrix} \text{pomijam} \\ \left(\frac{d}{r}\right)^2 \end{matrix} \right\} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \right)^{-1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{|\vec{r} \cdot \vec{d}|}{r^2} = \frac{|\hat{r} \cdot \vec{d}|}{r} \ll 1, \ (1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} \ \text{dla } x \ll 1 \right\} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{d}}{2r} \right)$$

analogicznie

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}/2|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{d}}{2r} \right), \text{ stąd}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{kq}{r} \left(1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{d}}{2r} - 1 + \frac{\hat{r} \cdot \vec{d}}{2r} \right) = \frac{k q \vec{d} \cdot \hat{r}}{r^2} = \left\{ k q \vec{d} = \vec{p} \right\} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

gdzie $\vec{p} = kq\vec{d}$ – wektor momentu dipolowego (moment dipolowy)

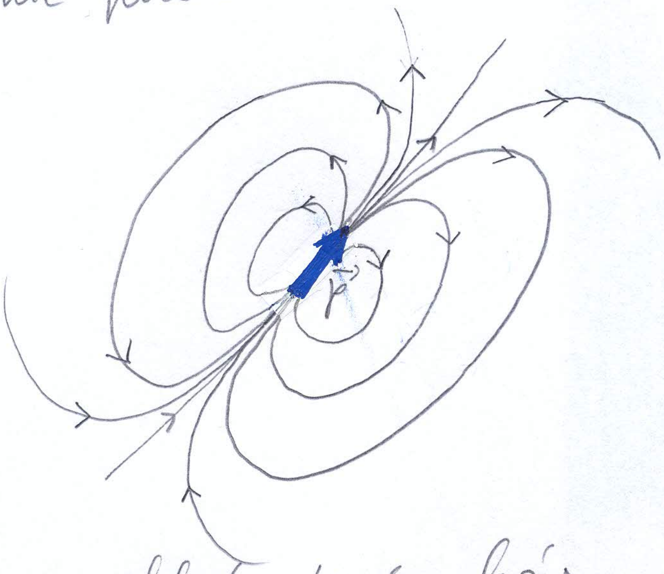
Czyli $\boxed{V_{dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}}$ – potencjał dipola elektrycznego.

Wykaż, że $\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = -\nabla V_{dip}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{r^3}$!

Uwaga: Potencjał dipola maleje z r jak $\frac{1}{r^2}$

pole $\vec{E}(\vec{r})$ dipola maleje z r jak $\frac{1}{r^3}$

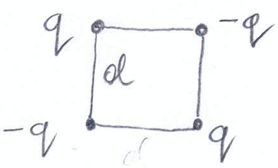
Linie pola el-stat dipola elektrycznego:



$\uparrow \vec{p}$ – wektor mom. dipolowego

Inne układy ładunków

kwadrupol ($r \gg d$)

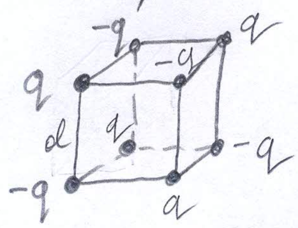


dwa dipole ustawione „przeciwnie"

$V_{kw}(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^3}$

$\vec{E}_{kw}(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^4}$

oktupol ($r \gg d$). itd



dwa kwadrupole ustawione „przeciwnie"

$V_{okt}(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^4}$

$\vec{E}_{kw}(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^5}$