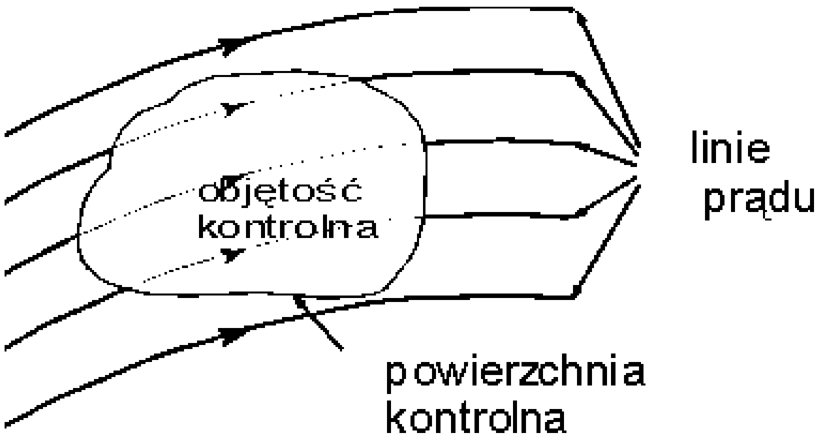
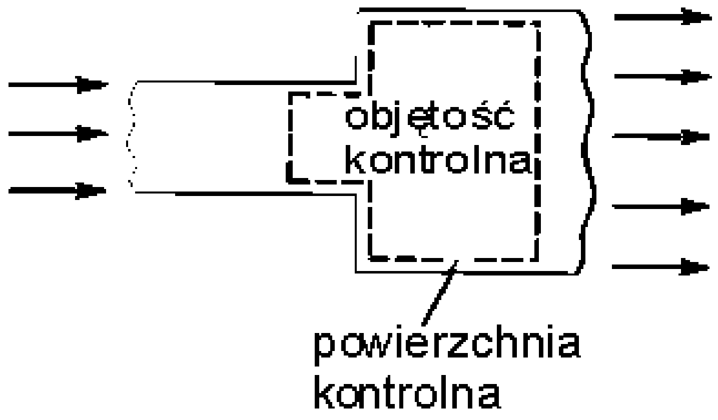
RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

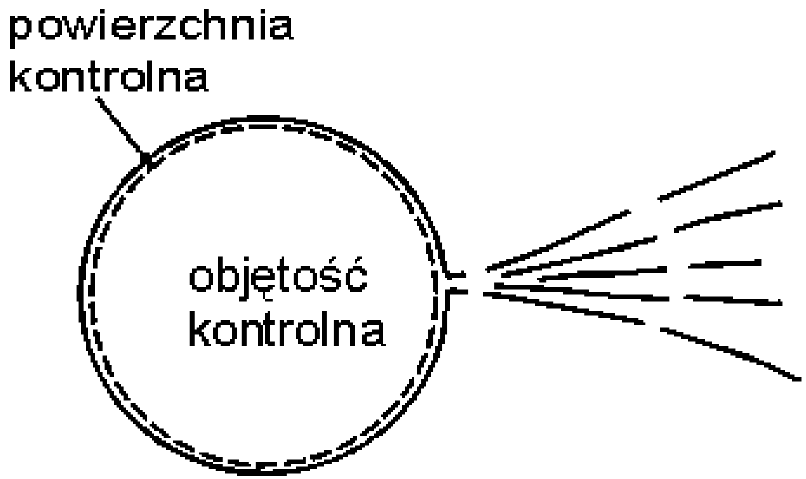
https://home.agh.edu.pl/~czapli

– podstawowe równanie, które przedstawia prawo zachowania masy albo liczby cząstek

Tablica







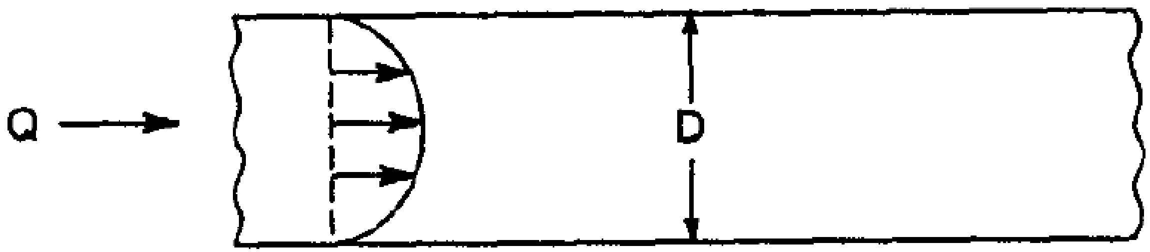
Ośrodek (płyn) **uważamy za ciągły wtedy, gdy na odległościach charakterystycznych dla przepływu** (szerokość rury, rozmiar liniowy opływanej przeszkody) **parametry ośrodka** (pole prędkości cząsteczek ośrodka, ciśnienie, temperatura, funkcje termodynamiczne) **zmieniają się w sposób ciągły.**

Można mówić wtedy o wartościach punktowych parametrów ośrodka.

Wartości punktowe są wielkościami średnimi parametrów lokalnych uśrednionych po obszarze zawierającym bardzo dużą liczbę cząsteczek ośrodka i zarazem dużo mniejszym od rozmiarów charakterystycznych przepływu.

Przykłady ośrodków ciągłych i nieciągłych:

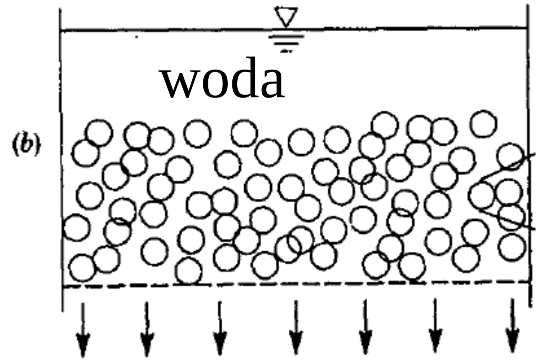
1. woda w rurze



dla makroskopowej rury woda jest ośrodkiem ciągłym

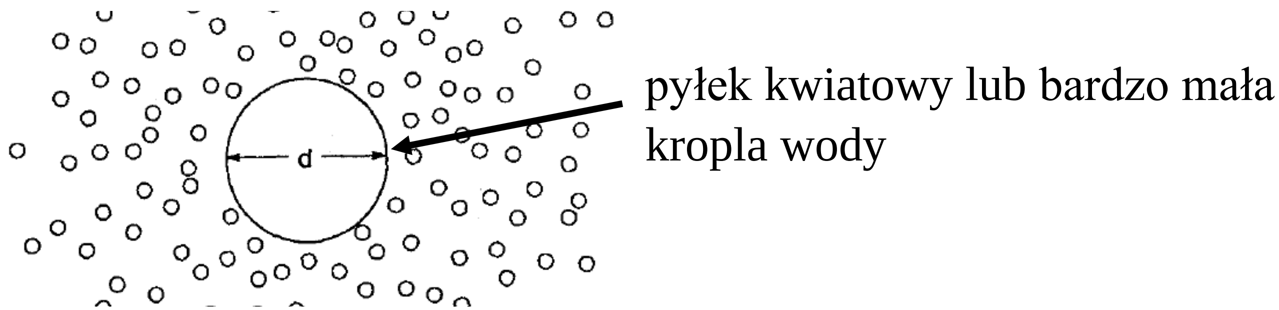
2. cząsteczki zawiesiny

a) dla ziarna piasku woda jest ośrodkiem ciągłym



b) dla pyłku kwiatowego i bardzo małych kropel wody (np. kropel mgły) powietrze nie jest ośrodkiem ciągłym

powietrze



Uwaga! W fizyce słowo „cząstka" oznacza cząstkę elementarną (foton, elektron, kwark, itd.).
Słowo „cząsteczka (molekuła)" oznacza stan związany co najmniej dwóch atomów (H_2, CO_2, NaCl, itd.).

Na naszym wykładzie słowa cząstka i cząsteczka będą używane wymiennie gdy opisują: ziarno piasku, pyłku kwiatowego, zlepek wielu różnych molekuł. Jednak pojedynczą molekułę będziemy zawsze nazywać cząsteczką.

Kryterium ciągłości ośrodka

określa kiedy dla danej cząstki ośrodek jest ciągły, a kiedy jest nieciągły

Liczba (parametr) Knudsena $\mathrm{Kn} = \dfrac{2\lambda}{d},$

λ - średnia droga swobodna cząsteczki ośrodka; d - średnica cząsteczki zawiesiny

$$\lambda = \frac{\mu}{0.5\,p}\sqrt{\frac{\pi R T}{8 m_a}},$$

μ – lepkość ośrodka, p - jego ciśnienie, m_a – masa molowa,
T – temperatura, R – stała gazowa.

– dla powietrza w warunkach normalnych

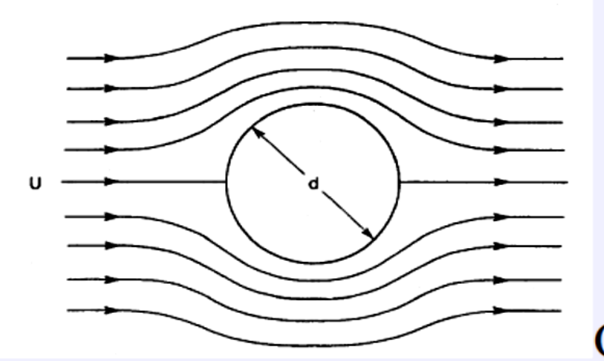
$$\lambda \approx 7 \times 10^{-8}\mathrm{m}.$$

Dla $\mathrm{Kn} \ll 1$ – możemy mówić o ośrodku ciągłym;
dla $\mathrm{Kn} \gg 1$ – ośrodek ziarnisty.

Zawiesiny cząsteczkowe o niskich koncentracjach i ich przepływy

Zagadnienia „środowiskowe” transportu często koncentrują się na transporcie *małych* cząsteczek (sadza, popiół, organiczne cząsteczki w ściekach) o średnicach rzędu 0.01 mm = 10 μm.

Siły działające na małą cząsteczkę sferyczną w płynie:



Opływ cząsteczki dla niskich wartości liczby Reynoldsa.

Rozważamy opływ cząsteczki (średnica d_{cz}) przez płyn (gęstość ρ_{pl}; lepkość μ), poruszający się ze stałą prędkością U (prędkość „daleko” od cząsteczki – to jest bardzo ważny *warunek brzegowy*).

Pamiętamy (?), że podstawowym (i bezwymiarowym) parametrem określającym przepływy jest *liczba Reynoldsa*, Re

$$\mathrm{Re}_{cz} = \frac{d_{cz} U \rho_{pl}}{\mu}.$$

Dla Re $\ll 1$ mamy tzw. przepływ Stokes'a – symetryczny (przód/tył, góra/dół), bez efektów powierzchniowych.

Siła oporu całkowitego, na który składa się tzw. *opór kształtu* i *opór naskórkowy* to dobrze nam znany wzór Stokesa:

$$F_{op} = 3\pi d_{cz} U \mu = 6\pi r_{cz} U \mu \quad \text{prawdziwy gdy Re} << 1$$

Dla Re > 1 siły oporu już trzeba wyznaczać inaczej, np. eksperymentalnie.

Wzór Newtona:

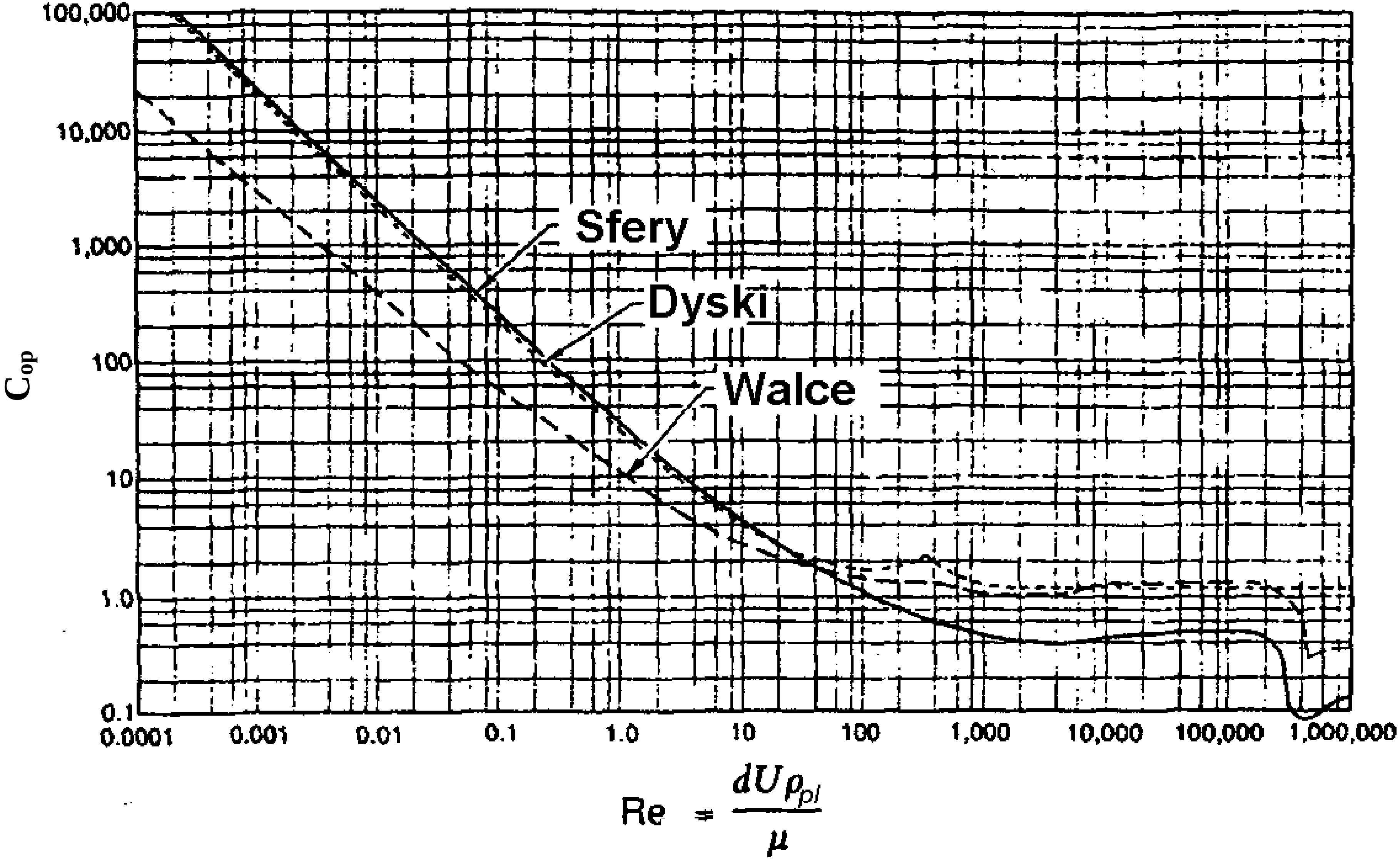
$$F_{op} = \frac{1}{2} C_{op} \rho_{pl} U^2 A,$$

gdzie F_{op} to siła oporu przy przepływie ustalonym,
C_{op} – współczynnik oporu,
A – pole powierzchni przekroju cząsteczki, „widzianego" przez poruszający się płyn.
Właśnie współczynniki C_{op} są określane eksperymentalnie (wykresy, lub formuły empiryczne).
Np. dla sfer

$$C_{op} = \frac{24}{\mathrm{Re}} \qquad 0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 2,$$

$$C_{op} = \frac{18,5}{\mathrm{Re}^{0.6}} \qquad 2 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 500,$$

$$C_{op} = 0.44 \qquad 500 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 2 \times 10^5$$



Wykresy współczynnika C_{op} dla sfer, walców i dysków, w funkcji liczby Reynoldsa.

Dla małych (malutkich!) cząsteczek możemy mieć kłopoty z „utrzymaniem” pojęcia ośrodka ciągłego – cząsteczka o wymiarach porównywalnych z wymiarami cząsteczek ośrodka porusza się pomiędzy takimi cząsteczkami „swobodniej”, wykorzystując luki w (ziarnistej już) strukturze ośrodka.

Prowadzi to do pewnej modyfikacji prawa Stokesa

$$F_{op} = \frac{3\pi d U \mu}{C_C}, \quad \text{(dla Re << 1)}$$

$d \equiv d_{cz}$, C_C to tzw. współczynnik poślizgu Cunninghama:

$$C_C = 1 + \mathrm{Kn}\left[\alpha + \beta \exp(-\gamma/\mathrm{Kn})\right];$$

($\alpha = 1.257$; $\beta = 0.40$; $\gamma = 1.10$ – współczynniki liczbowe).

Powyższy wzór, zastosowany do powietrza jako medium w którym poruszają się nasze cząsteczki (średnica d) daje następujące wyniki:

Współczynnik poślizgu Cunninghama dla powietrza w funkcji średnicy cząstek ($p = 1\,\mathrm{atm}$; $t = 25^\circ\,\mathrm{C}$).

średnica d [μm]	C_C
0.01	22.7
0.05	5.06
0.1	2.91
0.5	1.337
1.0	1.168
5.0	1.034
10.0	1.017

(Flagan, Seinfeld, *Fundamentals of Air Pollution Engineering*, , Prentice Hall 1988)

Tak jest dla cząsteczek o kształcie sferycznym.

Dla innych cząsteczek, takich jak wydłużone (bakterie, cząsteczki włókien) lub zgoła nieregularne (sadza, węglan wapna)

siła oporu zostaje – w zależności od kształtu –

przemnożona przez pewien *współczynnik kształtu* χ większy od jedności,
a występująca we wzorze średnica cząstki zostaje zastąpiona *średnicą równoważną* (ekwiwalentną) d_{eq} (średnicą sfery o takiej samej objętości jaką ma niesferyczna cząstka).

$$F_{op} = 3\pi\chi d_{eq} U\mu \qquad \text{(dla Re << 1)}$$

Wartości χ dla różnych kształtów geometrycznych i dla różnych, konkretnych materiałów można znaleźć w tabelach.