

Hydrodynamika - równanie Naviera-Stokesa

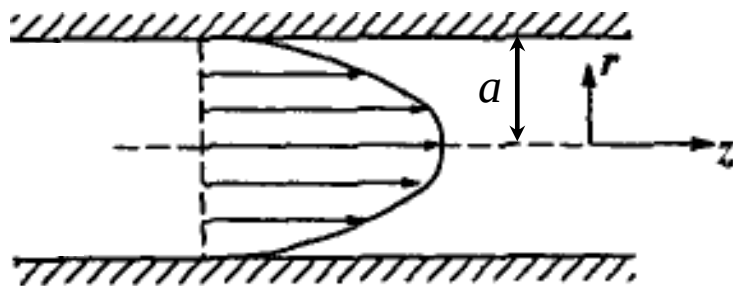
przepływ Poiseuille'a

Równanie Naviera-Stokesa dla płynu nieściśliwego $\rho(\vec{r}, t) = \text{const.}$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$$

tutaj $\vec{u}(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$

Przepływ Poiseuille'a – przepływ ustalony i laminarny w walcowej rurze



$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\vec{u}(r, \theta, z) = (u_r(r, \theta, z), u_\theta(r, \theta, z), u_z(r, \theta, z))$$

w tym przypadku $u_r(r, \theta, z) = 0$, $u_\theta(r, \theta, z) = 0$, $u_z(r, \theta, z) = u_z(r)$

warunki brzegowe: $u_z(a) = 0$, $u_z(0) < \infty$

Równanie N-S we współrzędnych cylindrycznych (Clark str. 618):

Cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

U nas $\vec{u} = (0, 0, u_z(r))$

Wnioski: 1. Równanie dla współrzędnej z . 2. Gdy $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ to $\frac{\partial p}{\partial z}$ zależy tylko od z .

Wtedy $\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} u_z(r) \right] - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, z warunkami brzegowymi $u_z(a) = 0$, $u_z(0) < \infty$

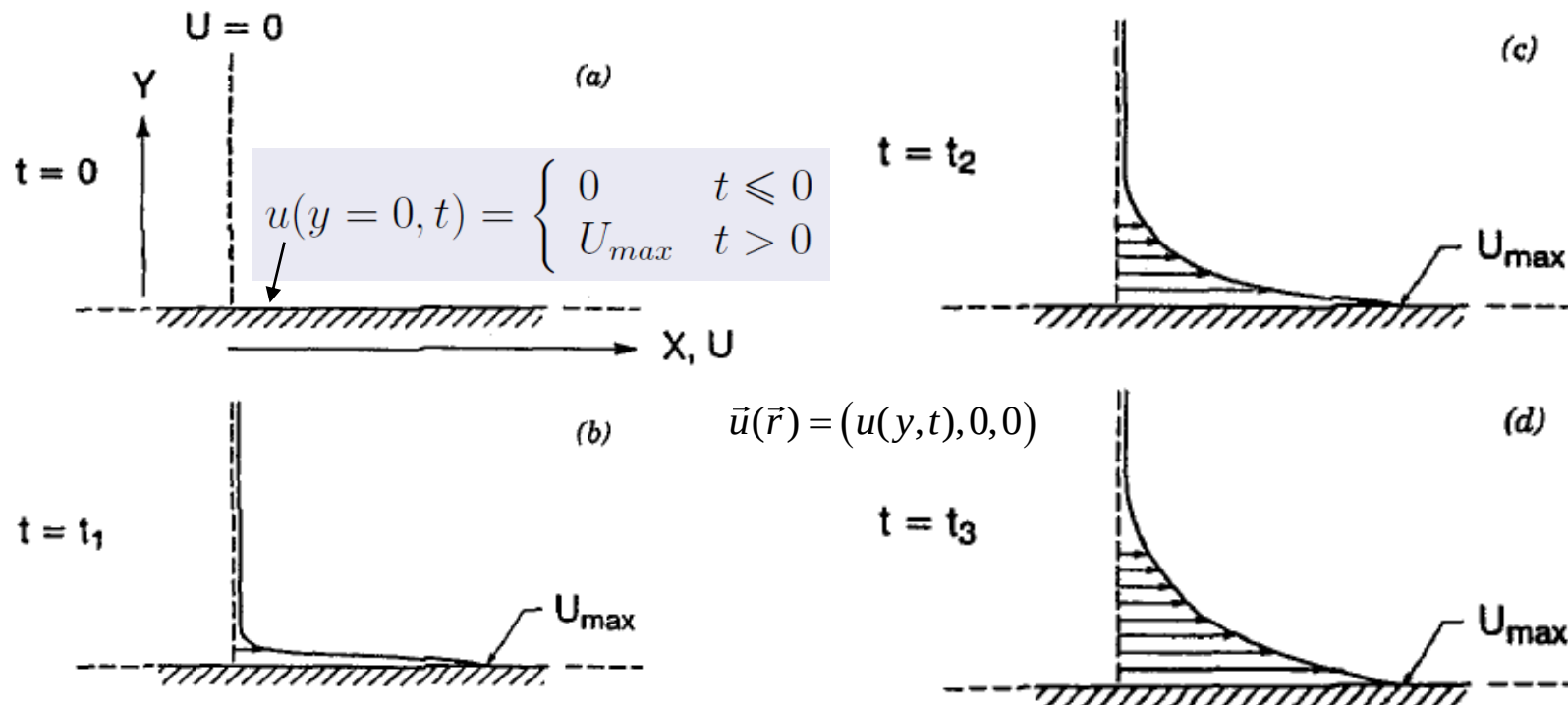
Rozwiązanie: $u_z(r) = \frac{C}{4\mu} (r^2 - a^2)$ - **TABLICA**

Równanie Navier-Stokesa

przepływ nad płytą

przepływ pełzający

dolna ścianka w $t = 0$ rozpoczyna ruch ze stałą prędkością U_{max}



następuje przekaz pędu poziomego w kierunku do niego prostopadłym – istota lepkości

Transfer lepki

Prędkość płynu ma tylko składową „poziomą” $u_x \equiv u = u(y, t)$.

Prędkość *zmienia się w czasie*, a więc przepływ jest *nieustalony*.

Równanie przepływu jest proste – ponieważ ciśnienie w całej objętości jest stałe $dp/dx = 0$ i z r. Naviera-Stokesa dostajemy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

gdzie $\nu = \mu/\rho$ to tzw. *kinematyczny współczynnik lepkości*.

Warunki brzegowe to

$$u(y = 0, t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ U_{max} & t > 0 \end{cases}$$

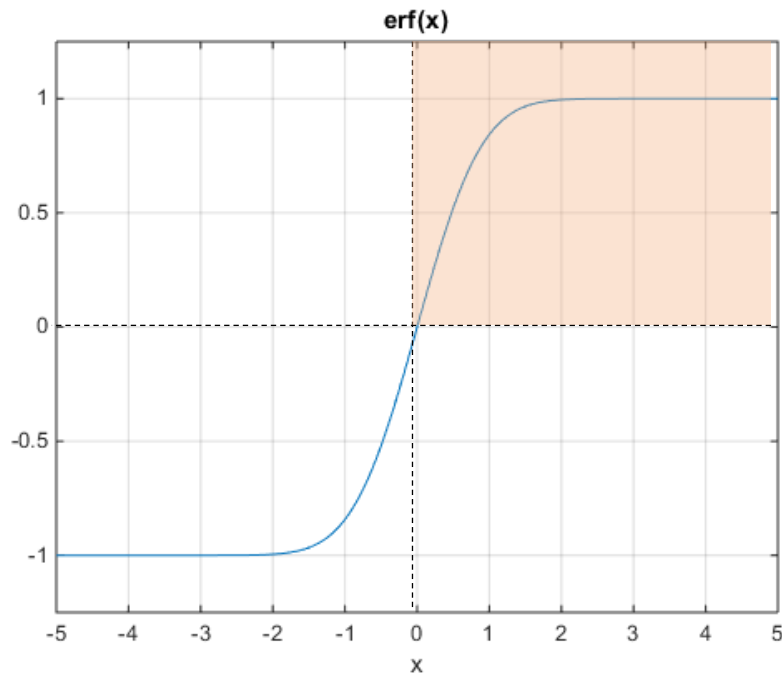
Równanie to można rozwiązać metodą transformaty Laplace’a,

$$u(y, t) = U_{max} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right)$$

Funkcja błędu

(error function)

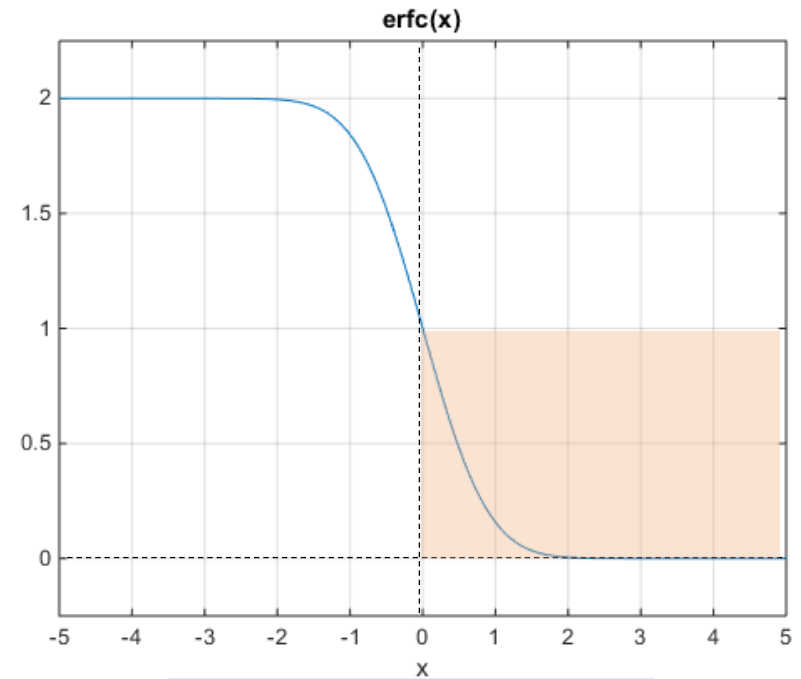
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$



dopełnienie funkcji błędu

(complementary error function)

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \end{aligned}$$



$$u(y, t) = U_{\max} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right)$$

Płyny nielepkie i równanie Eulera

Płyn nielepki („sucha woda”) opisuje równanie N-S, w którym kładziemy $\mu = 0$.

$$(17) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}.$$

Jest to tzw. równanie Eulera (już pierwszego rzędu, ale w dalszym ciągu nieliniowe). Z tego też powodu, w równaniu tym pojawia się dodatkowy problem: nie ma w nim miejsca na warunek braku poślizgu (zerowanie się prędkości na nieruchomych ściankach) – kontury graniczne obszaru przepływu są także liniami prądu.

Przepływ *potencjalny* albo *bezwirowy* to taki, w którym *wirowość* (rotacja wektora prędkości) jest równa zeru:

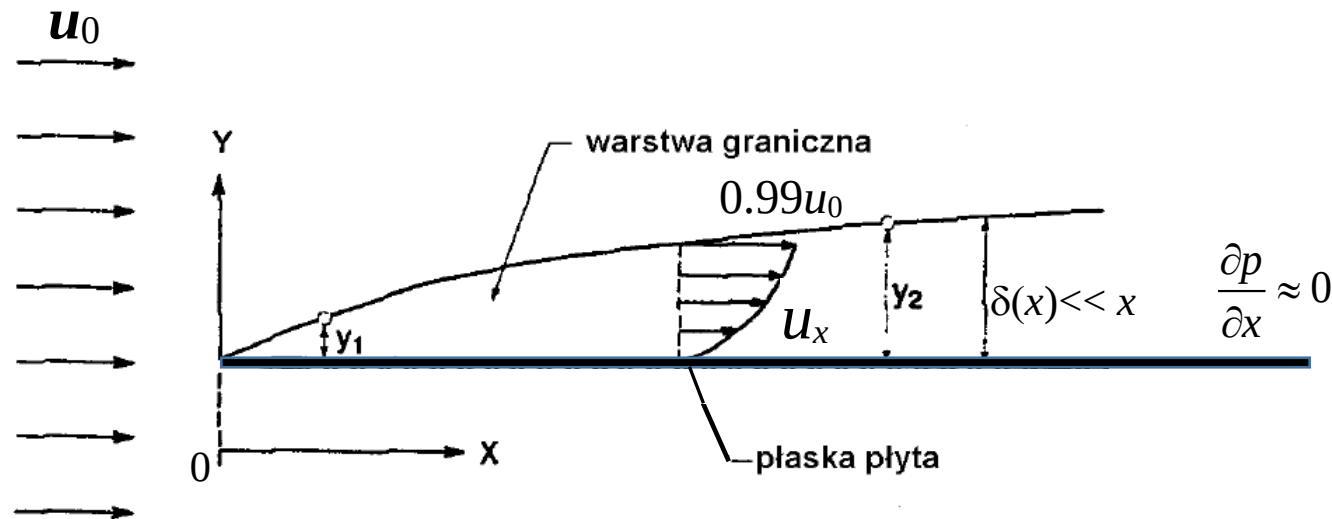
$$(18) \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0.$$

Bezwirowe przepływy to takie, w których cząsteczki płynu poruszające się wzdłuż linii prądu nie doznają obrotów. Twierdzenie Kelvina o zachowaniu (bez)wirowości w przypadku płynu nielepkiego: przepływ (np. opływ sfery), który zaczął się jako bezwirowy (gdzieś daleko) pozostaje bezwirowym także i w bezpośrednim sąsiedztwie.

Tablica

Przepływ cieczy z (niezaburzona) prędkością U nad długą i płaską płytą

Laminarna warstwa graniczna



uznajemy umownie warstwę graniczną za obszar, w którym prędkość ciecży $u_x \leq 0.99 u_0$

Warstwa graniczna narasta w dodatnim kierunku osi $0x$, a jej nachylenie powoduje, że wytwarza się pewna, różna od zera, składowa prędkości w kierunku pionowym (osi $0y$).

Tablica

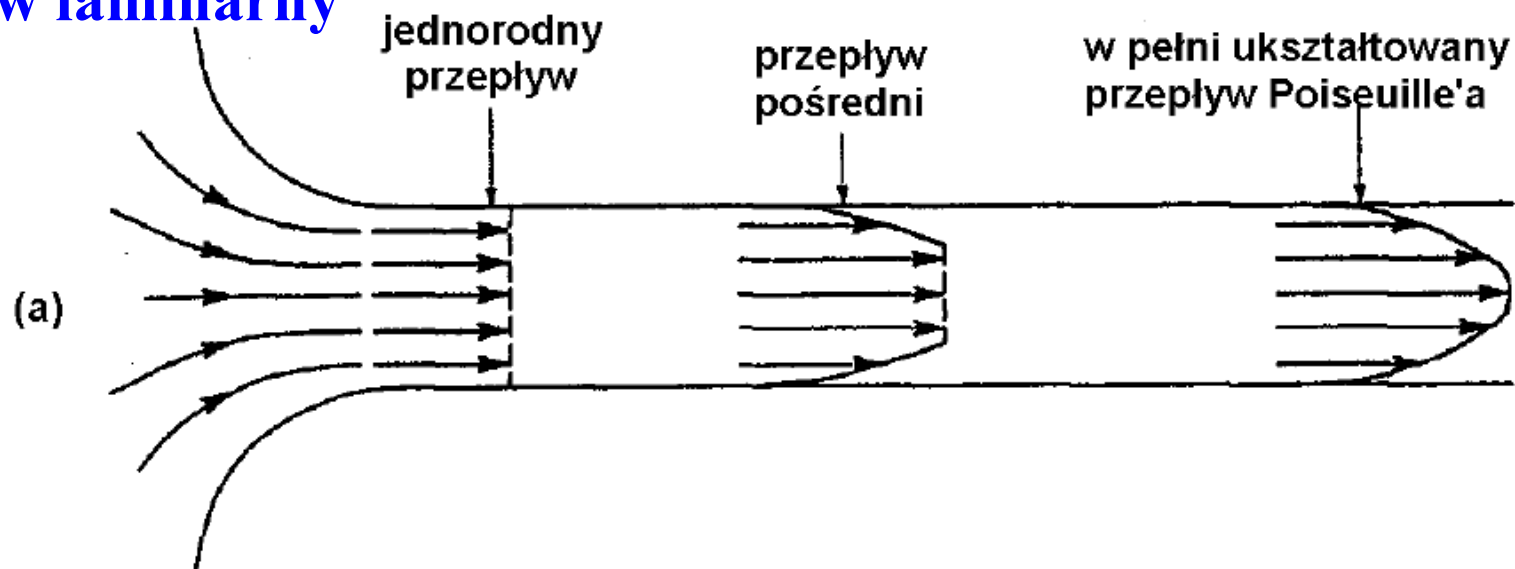
Przepływy turbulentne

W dużym skrócie: Turbulencje powstają dla dużych wartości liczby Reynoldsa ($Re \geq 2000$);

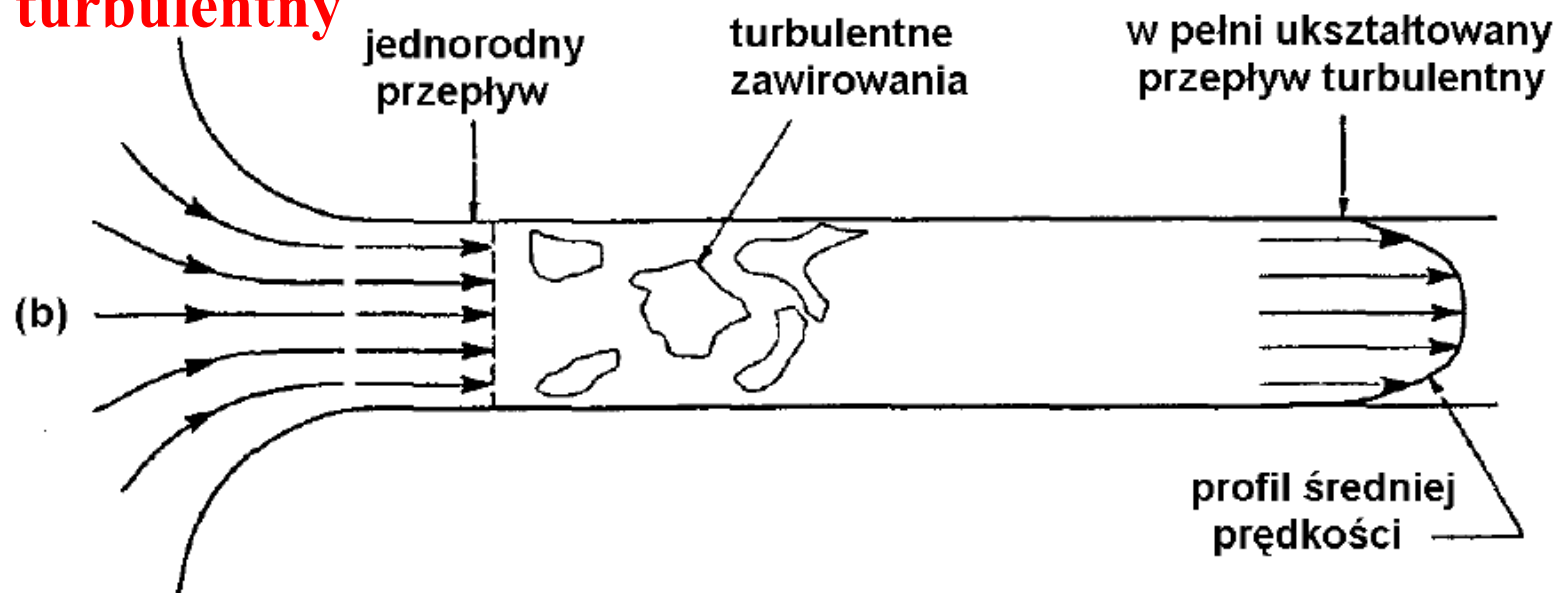
Charakterystyczne cechy przepływów turbulentnych to

- *Losowy charakter* – wartość parametru (np. prędkości) w danej chwili (danych chwilach) czasu nie pozwala nic powiedzieć o jego wartości po upływie czasu, chociaż pewne prognozy dotyczące *wartości uśrednionych* są możliwe.
- *Trójwymiarowość* – dwuwymiarowe przepływy turbulentne po prostu nie istnieją.
- *Hierarchia wirów o mniejszych/większych rozmiarach* – istnieją jednak pewne korelacje pomiędzy prędkościami w różnych punktach (obszarach) przepływu w danym momencie (pewna powtarzalność schematu turbulencji).
Modelowanie numeryczne zjawisk turbulencji wskazuje na pewną inherentną skłonność do samoorganizacji.
- *Kaskada (transferu) energii* – energia jest przekazywana od struktur (wirów) o większej skali do struktur mniejszych.
- *Dyfuzja (ciepła, masy i pędu)* – por. rysunek, na którym pokazana jest dyfuzja barwnika w przepływie laminarnym i turbulentnym.

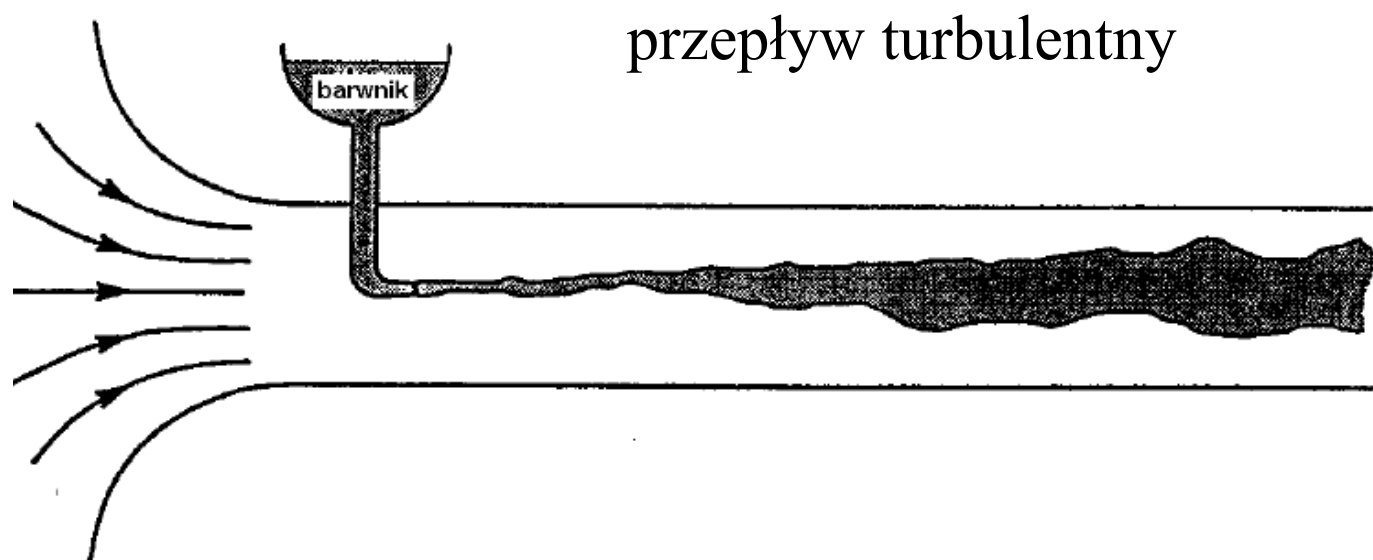
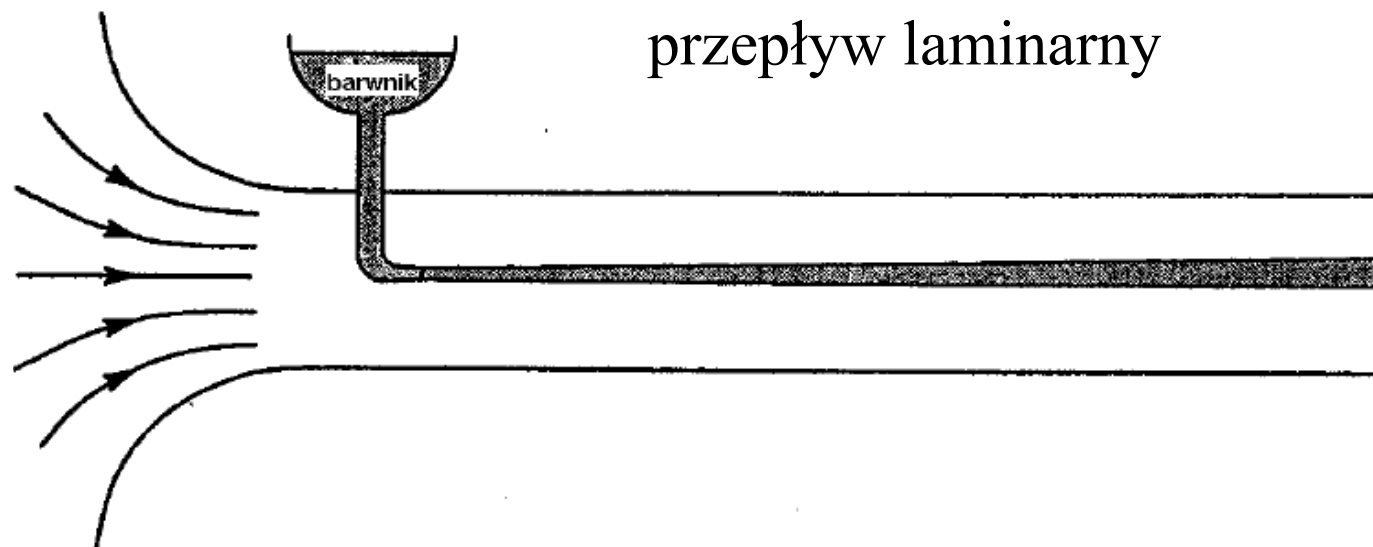
- przepływ laminarny



- przepływ turbulentny



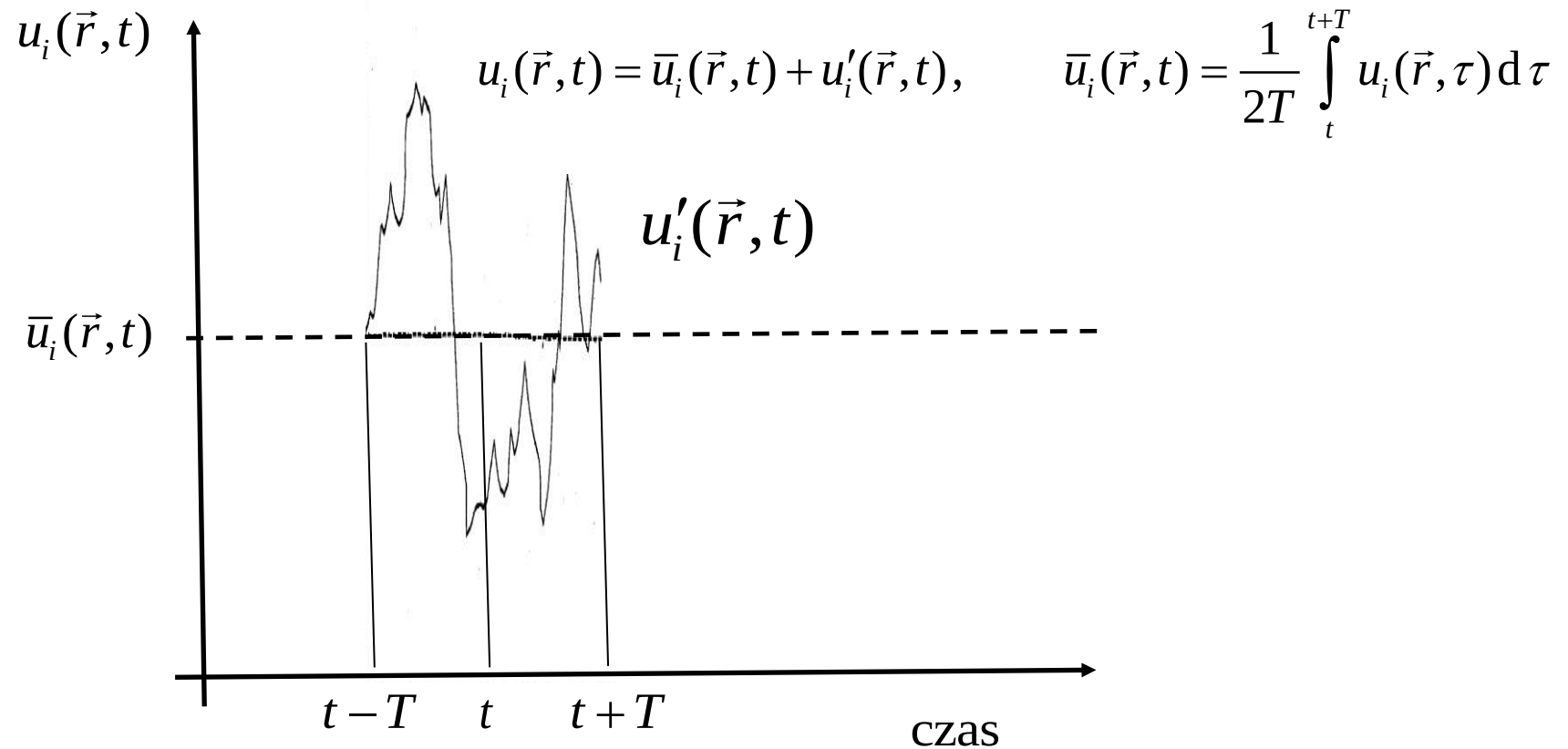
Kształtowanie się przepływu laminarnego i turbulentnego w kolumnie o gładkiej powierzchni wewnętrznej.



Dyfuzja barwnika w przepływie laminarnym i turbulentnym.

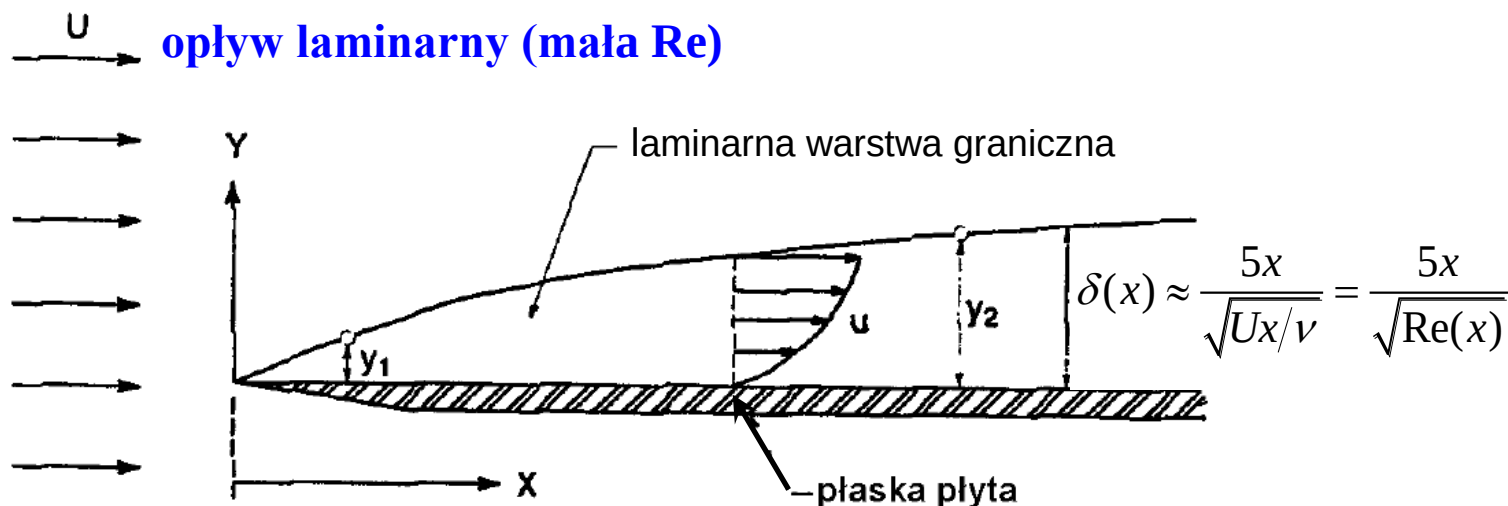
Lokalne prawo zachowania pędu dla płynu nielepkiego – **TABLICA**

Fluktuacja prędkości w danym punkcie płynu i średniowanie Reynoldsa



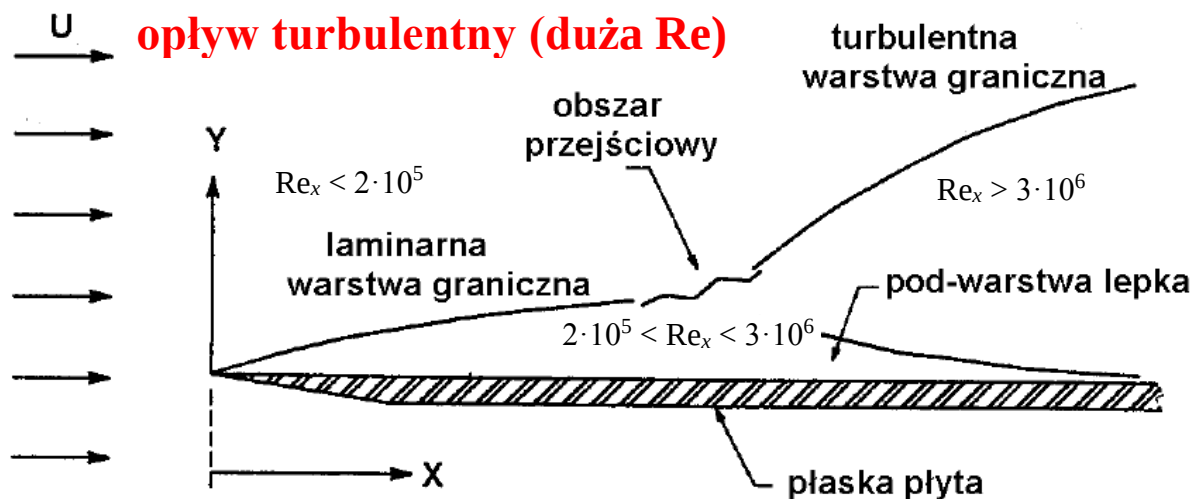
TABLICA

Turbulentna warstwa graniczna



Jednorodny przepływ nad płaską płytą.

Tak było dla przepływu laminarnego – dla większych prędkości (albo/i x -ów) dochodzimy do sytuacji, w których warstwa graniczna staje się turbulentna.



Turbulentne warstwy graniczne są bardziej „skuteczne” jeżeli chodzi o transport (ciepła, pędu, masy); dlatego też graniczne warstwy turbulentne są grubsze od laminarnych.